

**Eine gewebetheoretische Methode in der
Theorie der holomorphen Abbildungen:**

**STARRHEIT UND NICHTÄQUIVALENZ VON
ANALYTISCHEN POLYEDERGEBIETEN**

Johann Baumann

1982

**Eine gewebetheoretische Methode in der
Theorie der holomorphen Abbildungen:**

**STARRHEIT UND NICHTÄQUIVALENZ VON
ANALYTISCHEN POLYEDERGEBIETEN**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
an der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Johann Baumann
aus Willhof

eingereicht am 19. März 1981



Tag der mündlichen Prüfung: 9. Februar 1982

1. Berichterstatter : Prof. Dr. K. Stein
2. Berichterstatter : Prof. Dr. M. Schottenloher

Für meine kleine Rabäh

I n h a l t

Einleitung und Zusammenfassung	I
§0 Meromorphe Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten	0
Kapitel I Meromorphe Gewebe auf komplexen Mannigfaltigkeiten	4
§1 Strukturgleichungen meromorpher Gewebe	4
§2 Invarianten von meromorphen Geweben auf komplexen Mannigfaltigkeiten	19
Kapitel II Lokale Bedingungen für gewebetreue Abbildungen	28
§1 Lineare Gewebe auf komplexen Mannigfaltigkeiten	28
§2 Nichtlineare Gewebe auf 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten und ihre wesentlichen Invarianten	41
Kapitel III Analytische Polyedergebiete und ihre Gewebe	64
§1 Der Satz von Remmert-Stein	64
§2 Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$	72
Kapitel IV Anwendungen der Gewebetheorie auf Polyedergebiete	84
§1 Polyedergebiete mit affinen Zerlegungsgeweben	84
§2 Simplexgebiete im $\mathbb{C}^2$ und ihre Automorphismen	108
§3 Einige Scharen von Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ mit nichtlinearen Zerlegungsgeweben	129
Literatur	151

Einleitung

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz lässt sich jedes einfach zusammenhängende beschränkte Gebiet der Zahlenebene $\mathbb{C}$ biholomorph auf den Einheitskreis abbilden, insbesondere haben je zwei solche Gebiete isomorphe Automorphismengruppen.

Im Fall von m komplexen Veränderlichen, $m \geq 2$, gilt eine analoge Aussage nicht mehr: Zwei beschränkte Gebiete im $\mathbb{C}^m$ vom topologischen Typus der $2m$ -dimensionalen Zelle sind nicht notwendigerweise biholomorph äquivalent und die Gruppen ihrer holomorphen Automorphismen nicht notwendig isomorph, selbst wenn diese Gebiete als Holomorphiegebiete vorausgesetzt werden. Es kann andererseits vorkommen, dass solche Gebiete starr sind, d.h. dass ihre Automorphismengruppen jeweils nur aus dem Einselement bestehen. Beispiele von starren Holomorphiegebieten sind seit langem bekannt (vgl. [3], [13], [19]). In manchen Untersuchungen über Gebiete dieser Art haben analytische Polyedergebiete eine wichtige Rolle gespielt.

Einem analytischen Polyedergebiet P ist in natürlicher Weise ein System von analytischen Zerlegungen von P zugeordnet, die ein komplex-analytisches Gewebe bilden. Nach einem Satz von R. Remmert und K. Stein [16] (vgl. auch W. Rothstein [19] und K.H. Hedtfeld [13]) werden bei eigentlichen holomorphen Abbildungen zwischen analytischen Polyedergebieten die diesen zugeordneten Gewebe übertragen. Zum Studium von Abbildungs- und Starrheitsfragen bei analytischen Polyedergebieten liegt es daher nahe, Methoden der Theorie der Gewebe, vor allem deren differentialgeometrische Techniken, heranzuziehen.

Der Ausführung dieses Gedankens ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Wir übertragen Begriffe und Aussagen der klassischen Gewebetheorie vom reellen Fall auf den komplex-analytischen

Fall. Grundlegend ist der Begriff des meromorphen $(m+1)$ -Gewebes auf einer m -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit, $m \geq 2$. Für Gewebe dieser Art werden globale Halbinvarianten und Invarianten beschrieben und Aussagen über gewebetreue Abbildungen bewiesen.

Die Gewebetheorie wird dann auf die Theorie der holomorphen Abbildungen zwischen analytischen Polyedergebieten angewandt. Die hierbei gewonnenen Ergebnisse sind in der folgenden Zusammenfassung zum Teil aufgeführt.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil werden Elemente einer Theorie meromorpher $(m+1)$ -Gewebe auf komplexen offenen m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten erarbeitet. Damit ist eine Grundlage für Untersuchungen der Zerlegungsgewebe auf Polyedergebieten mit geeignet vielen Randfunktionen im zweiten Teil gelegt.

In einem nullten Paragraphen haben wir einige fundamentale Tatsachen über meromorphe Differentialformen aufgeführt. Besonders wichtig für diese Arbeit ist der Begriff der analytischen Unabhängigkeit von meromorphen Funktionen bzw. von meromorphen Differentialformen.

Das erste Kapitel ist dem Begriff des meromorphen $(m+1)$ -Gewebes gewidmet. Zunächst wird ein solches Gewebe auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^m$, $m \geq 2$, eingeführt als ein geordnetes $(m+1)$ -tupel von analytisch unabhängigen meromorphen Differentialformen, die der Frobenius Aussage für Integrabilität formal genügen. Die analytische Unabhängigkeitsbedingung entspricht der Bedingung der allgemeinen Lage bei reellen Geweben.

Es wird dann die meromorphe Version des Kalküls der halbinvarianten Ableitung der Gewebeformen nach Blaschke-Bol [6] entwickelt. Es wird schliesslich die Unterscheidung der linearen und nichtlinearen Gewebe erklärt. Für nichtlineare Gewebe liefert der Kalkül meromorphe Halbinvariantenfunktionen mit ansteigendem Gewicht. Schliesslich werden noch einige Identitäten hergeleitet, die z.T. später noch für Anwendungen interessant bzw. entscheidend sind (vgl. z.B. I 1.10.).

Im zweiten Paragraphen des ersten Kapitels werden die Gewebe auf Gebieten des $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$, als lokale Modelle eines allgemeineren Begriffs von $(m+1)$ -Geweben auf m -dimensionalen offenen komplexen Mannigfaltigkeiten aufgefasst. Es wird die Zuordnung des heute üblicheren Connection-Begriffs anhand einer "working definition" aus [11] bzw. [9] angedeutet.

Aus den lokalen Halbinvariantenfunktionen werden durch Quotientenbildung globale meromorphe Invariantenfunktionen gewonnen. Am Schluß des Paragraphen wird auf die Rolle von Invariantenfunktionen gegenüber gewebetreuen Abbildungen eingegangen, und einige Gesichtspunkte für Anwendungen werden erörtert.

Im zweiten Kapitel werden zuerst lineare $(m+1)$ -Gewebe betrachtet sowie Probleme der lokalen und globalen Existenz von Linearisierungsfunktionen behandelt; dabei spielen das semidirekte Produkt der Gruppen $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{C}^m, +)$, $m \geq 2$ fest, sowie topologische Bedingungen eine wichtige Rolle. Allgemeine Aussagen über Existenz von gewebetreuen Abbildungen bei Vorliegen von globalen Linearisierungsfunktionen werden erarbeitet; damit werden bekannte Sätze über affine Zerlegungen in einen allgemeineren Zusammenhang gestellt (vgl. II 1.10).

Der zweite Paragraph des 2. Kapitels betrifft nichtlineare zweidimensionale 3-Gewebe. Gewebe vom Typ (I) und vom Typ (II) werden eingeführt, ein Kriterium wird formuliert. Als Ansatz für eine Verwendung der Invariantenfunktionen zur Konstruktion gewebetreuer Abbildungen werden notwendige und hinreichende lokale Bedingungen über die Existenz lokaler gewebetreuer Abbildungen entwickelt. Als Folgerung ergibt sich eine später nützliche Charakterisierung der linearen, Typ (I) bzw. Typ (II) - Gewebe mittels gewebetreuer Selbstabbildungskeime (II 2.9). Das dritte Kapitel vermittelt zwischen Gewebetheorie und den Polyedergebieten. Es werden die grundlegenden Begriffe wie Zerlegungen, Minimalsystem, etc. für Polyedergebiete zusammengestellt. Wir definieren weiter eine neue Invariante $\sigma(G)$ als Mass der möglichen Gewebestrukturen auf einem Polyedergebiet G , (vgl. III 1.4).

Im zweiten Paragraphen ordnen wir dann jedem Polyedergebiet, das eine bestimmte Bedingung erfüllt, seine "Zerlegungsgewebe" zu. Es folgen einige Aussagen über formelmässige Behandlung von Zerlegungsgeweben; anschliessend diskutieren wir permutierte Gewebe.

Besonders nützlich für Anwendungen ist die Tabelle III 2.6 der einfachsten permutierten Invariantenfunktionen.

Es wird ferner eine Invariante $T(G)$ für Polyedergebiete G eingeführt und durch ein Beispiel illustriert.

Im vierten Kapitel werden Anwendungen gegeben.

Wir konstruieren Familien von starren, paarweise nichtäquivalenten analytischen Polyedergebieten. Im Zusammenhang hiermit ergeben sich auch klassische Resultate von W. Rothstein [19], H. Behnke und E. Peschl [3], K.H. Hedtfeld [13] sowie R. Remmert und K. Stein [16] auf einem neuen Weg.

Als ein weiteres Ergebnis gewinnen wir u.a. die Aussage, dass euklidische (z.B. Simplexgebiete) und komplex-affine Polyedergebiete (dies sind Durchschnitte von Polyzylindern) niemals vermöge eigentlicher holomorpher Abbildungen aufeinander abgebildet werden können.

Der zweite Paragraph beschäftigt sich speziell mit Simplexgebieten, wobei besonders auf den 2-dimensionalen Fall eingegangen wird. Schliesslich werden noch Beispiele von Polyedergebieten mit nichtlinearen Zerlegungsgeweben betrachtet: Dabei werden die oben erwähnten Invariantenfunktionen zur Konstruktion neuer Scharen starrer Polyedergebiete herangezogen.

Es sei bemerkt, dass der vorgestellten Methode in zweierlei Hinsicht Grenzen gesetzt sind: Zum einen können auf Polyedergebieten mit zuwenig geeigneten Zerlegungen keine $(m+1)$ -Gewebe eingeführt werden, zum anderen treten bei Polyedergebieten mit einer großen Zahl von Zerlegungsgeweben rechentechnische Schwierigkeiten auf. Es ist denkbar, dass Methoden aus der Arbeit [9] von Chern und Griffiths in letzterem Fall Abhilfe schaffen können.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Stein, der mich zu dieser Arbeit angeregt hat, und Herrn Prof. Dr. M. Schottenloher für ihre freundliche und geduldige Betreuung herzlich danken. Ausserdem haben mir viele andere, insbesondere Herr Dr. J. Maurer, durch kritische und ermutigende Gespräche sehr geholfen.

§0. Meromorphe Differentialformen auf komplexen Mannigfaltigkeiten

In diesem Paragraphen werden allgemein bekannte Begriffe und Aussagen über Differentialformen angeführt, die für diese Arbeit von fundamentaler Bedeutung sind.

Im Folgenden seien M, N komplexe offene zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit komplexer Dimension ≥ 2 , das Rechnen auf Mannigfaltigkeiten, ihren Tangentialbündeln, etc. sei bekannt.

0.1 Definition: Es sei M komplexe offene Mannigfaltigkeit. Dann:

$\Omega^p(M) :=$ Menge der holomorphen Differentialformen vom Grad p auf M

$\mathbb{R}^p(M) :=$ Menge der meromorphen Differentialformen vom Grad p auf M

wobei $p = 0, \dots, m = \dim M$.

Unter $\Omega^0(M)$ (bzw. $\mathbb{R}^0(M)$) sind die holomorphen (bzw. meromorphen) Funktionen auf M zu verstehen.

Auf einer lokalen Karte $(U, h_U: U \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^m)$ ist eine meromorphe Differentialform ω vom Grad p durch

$$\omega_V = \sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \quad \text{gegeben}$$

mit meromorphen Funktionen $a_{i_1 \dots i_p}$ auf V , $0 < i_1 < \dots < i_p \leq m$.

0.2 Definition: (Äussere Ableitung) [K], S.7

Es gibt für $0 \leq p < m$ eine Abbildung

$d: \mathbb{R}^p(M) \longrightarrow \mathbb{R}^{p+1}(M)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $d \circ d = 0$ und d ist linear.

b) Sind ω und μ Differentialformen vom Grad p bzw. q , so gilt:

$$d(\omega \wedge \mu) = (d\omega) \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge (d\mu)$$

Es ist üblich und praktisch sehr nützlich, für alle p dieselbe Bezeichnung d zu benutzen. Dies führt zu keinen Missverständnissen.

Auf einer Karte $(U, h_U: U \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^m)$ wird d wie folgt definiert:

$$d(a_{i_1 \dots i_p})_{z_j} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} = \sum_{j=1}^m (a_{i_1 \dots i_p})_{z_j} dz_j \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$$

wobei $(\dots)_{z_j}$ die partielle Ableitung von $(\dots)$ nach z_j bezeichne. (Auch diese Bezeichnungsweise wird später benutzt!).

Das Verhalten der meromorphen Differentialformen unter geeigneten Abbildungen wird im folgenden Lemma beschrieben:

o.3 Lemma (Pull-back, nach [1], p.67 3.5)

Es seien M, N komplexe offene Mannigfaltigkeiten mit gleicher Dimension $m \geq 2$, sowie $\varphi: M \longrightarrow N$ eine holomorphe Abbildung mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante (in den lokalen Koordinaten).

Dann induziert φ eine lineäre Abbildung

$$\varphi^*: \mathbb{R}^p(N) \longrightarrow \mathbb{R}^p(M) \quad \text{für jedes } p = 0, \dots, m, \text{ so dass:}$$

- a) $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ für meromorphe Funktionen f auf N (dh.: $p=0$)
- b) Es seien ω, μ, λ beliebige meromorphe Differentialformen auf N , dann gilt:

$$\varphi^*(d\omega \wedge (\mu + \lambda)) = d\varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\mu) + d\varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\lambda)$$

dh. φ^* ist mit d und $\wedge$ verträglich.

Auch hier ist es üblich, nicht für jedes p eine eigene Bezeichnung der Abbildung einzuführen, sondern alle gleichzeitig durch φ^* zu bezeichnen.

Auf lokalen Karten wird φ^* durch naheliegende Substitution und Nachdifferenzieren gegeben.

Es folgen einige bekannte Sätze über d , vgl. z. B. [15].

o.4 Satz: (Lemma von Poincaré) [K], S.57f.

Es bezeichne Ω^p die Garbe der holomorphen Differentialformen vom Grad p auf M . Dann gilt:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^m \longrightarrow 0$$

ist eine exakte Garbensequenz.

Dh.: Ist für eine holomorphe Differentialform $\omega \in \Omega^p(V)$ auf offenem $V \subset M$ mit $p > 1$ $d\omega = 0$, so gibt es zu jedem $x \in V$ eine offene Umgebung $U(x)$ in M sowie eine holomorphe Differentialform λ auf $U(x)$ vom Grad $p - 1$ so dass $d\lambda = \omega|_{U(x)}$.

o.5 Definition: (Integrabilität von 1-Formen) Sei $0 < r \leq m := \dim M$.

Ein System $(\omega_r, \dots, \omega_m)$ mit $\omega_i \in \Omega^1(M)$ heisst vollständig integrabel, wenn es zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U(x)$ und holomorphe Funktionen $f_j, g_{ij} \in \Omega^1(U(x)); i, j = r, \dots, m$ gibt mit

$$\omega_i = \sum_{j=r}^m g_{ij} df_j \quad \text{für } i = r, \dots, m$$

o.6 Satz: (Frobenius) [H], S. 144 ; [K], S. 57 ff.

Seien $\omega_r, \dots, \omega_m$ holomorphe Differentialformen vom Grad 1 auf der komplexen offenen Mannigfaltigkeit M mit $0 < r \leq m := \dim M$ und es gelte $\omega_r \wedge \dots \wedge \omega_m \neq 0$ auf ganz M .

Das System $(\omega_r, \dots, \omega_m)$ ist genau dann vollständig integrabel, falls es zu jedem x in M eine offene Umgebung $U(x)$ in M und holomorphe Differentialformen γ_{ij} vom Grad 1 auf $U(x)$ für $i, j = r, \dots, m$ gibt, so dass

$$d\omega_i = \sum_{j=r}^m \omega_j \wedge \gamma_{ij} \quad \text{für } i = r, \dots, m.$$

Diese Integrierbarkeitsbedingungen sind bekanntlich zu

$$d\omega_i \wedge \omega_r \wedge \dots \wedge \omega_m = 0 \quad \text{für } i = r, \dots, m \text{ äquivalent.}$$

Zur Integrabilität von meromorphen 1-Formen wäre zu sagen:

Durch Multiplikation mit einer geeigneten holomorphen Funktion kann man lokal zu einem System holomorpher 1-Formen übergehen.

Meist ist dann noch die Bedingung $\omega_r \wedge \dots \wedge \omega_m \neq 0$ verletzt.

Hierzu sei ein partielles modernes Resultat zitiert:

(Frobenius mit Singularitäten nach B. Malgrange I.H.E.S. 46 p. 163)

Sei $\omega = \sum a_i dz_i$ holomorphe Differentialform auf einer offenen Umgebung $U(0)$ im $\mathbb{C}^m$ und $X := \{z \in U(0) : a_i(z) = 0, i = 1, \dots, m\}$ Es gelte $\text{codim } X \geq 3$ und $d\omega \wedge \omega = 0$.

Dann gibt es $V(0) \subset U(0)$ und holomorphe Funktionen f, g auf $V(0)$ mit $\omega = f dg$ und $f(0) \neq 0$.

Der zentrale Begriff dieser Arbeit ist die analytische Abhängigkeit von meromorphen Funktionen und von meromorphen 1-Formen.

0.7 Definition:

a) Seien f, g nichtkonstante meromorphe Funktionen auf der komplexen offenen Mannigfaltigkeit M .

f und g heißen analytisch abhängig, falls $df \wedge dg \equiv 0$ auf M .

b) Seien ω, μ meromorphe nicht identisch verschwindende Differentialformen vom Grad 1 (dh. 1-Formen) auf der komplexen offenen Mannigfaltigkeit M .

ω, μ heißen (analytisch) abhängig, falls gilt: $\omega \wedge \mu \equiv 0$ auf M .

Analytisch abhängige meromorphe Funktionen lassen sich lokal ausserhalb einer dünnen analytischen Menge gegenseitig faktorisieren:

0.8 Satz: (Spezialfall von Satz 6.5F p.198 in [W])

Seien $f, g \in \mathbb{C}^0(M)$ nichtkonstant und analytisch abhängig.

Dann gibt es eine analytisch dünne Teilmenge $Z \subset M$, so dass gilt:

Zu jedem $x \in M - Z$ gibt es eine offene Umgebung $U(x)$ in $M - Z$

sowie eine offene Menge $H_x \subset f(U(x))$ und eine holomorphe Funktion a auf H_x mit

$g = a \circ f$ auf $U(x)$.

Für (analytisch) abhängige meromorphe 1-Formen gilt:

0.9 Lemma:

Seien ω, μ (analytisch) abhängige meromorphe Differentialformen vom Grad 1 auf der komplexen offenen Mannigfaltigkeit M .

Dann gibt es eine meromorphe nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion h auf M mit

$\omega = h \mu$ auf M .

Dies lässt sich leicht auf lokalen Karten nachrechnen.

Literatur:

[H]: H. Holmann, H. Rummeler: Alternierende Differentialformen
B.I. Mannheim Zürich 1972

[K]: E. Kähler: Einf. in die Theorie der Systeme von Dif. Gl.
Teubner Leipzig 1934

[W]: H. Whitney: Complex Analytic Varieties
Addison Wesley Reading Massachusetts 1972

Kapitel I Meromorphe Gewebe auf komplexen Mannigfaltigkeiten

§1 Strukturgleichungen meromorpher Gewebe

In diesem Kapitel werden einige Begriffe aus der Theorie der reellen Gewebe (nach Blaschke-Bol [5], [6]) ins Komplexe übertragen. Sie sollen später (in den Kapiteln III und IV) bei Problemen aus der komplexen Analysis benutzt werden. Im Laufe der Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass es nicht genügt, lediglich holomorphe Gewebe zu betrachten. Wir wollen deshalb meromorphe Gewebe einführen und ihre Invariantentheorie soweit entwickeln, wie es für die späteren Überlegungen vonnöten ist.

Unter einem Gewebe versteht man ein System von Blätterungen auf einer Mannigfaltigkeit. Da Mannigfaltigkeiten durch Atlanten von Koordinatenumgebungen (Karten) gegeben werden, müssen auch Gewebe über (maximale) Atlanten definiert werden. Unsere Vorgehensweise besteht nun darin, zunächst Gewebekarten oder Gewebe auf Gebieten des $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$ zu beschreiben und gewisse fundamentale Eigenschaften abzuleiten. Erst dann können wir im §2 den Begriff des meromorphen $(m+1)$ -Gewebes auf komplexen Mannigfaltigkeiten entwickeln.

Die Blätterungen (oder Zerlegungen) eines Gewebes können lokal durch Funktionen beschrieben werden. Der Satz von Frobenius zeigt, dass Blätterungen in äquivalenter Weise auch durch Differentialformen mit bestimmten Integrierbarkeitsbedingungen dargestellt werden. Wir werden in dieser Arbeit hauptsächlich mit dem eleganten Kalkül der Differentialformen arbeiten und betrachten Gewebe als gewisse Systeme von Differentialformen. "By abuse of notation" werden wir meromorphe Gewebekarten auch als meromorphe $(m+1)$ -Gewebe auf Gebieten in $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$ bezeichnen.

1.1 Definition

Ein System $W = (U, \omega_0, \dots, \omega_m)$ mit $m \geq 2$ werde meromorphe Gewebekarte (oder meromorphes $(m+1)$ -Gewebe) genannt, falls gilt:

- a) $\omega_0, \dots, \omega_m \in \mathbb{M}^1(U)$, wobei $U \subset \mathbb{C}^m$ ein Gebiet ist.
- b) $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_m} \neq 0$ für alle $0 \leq i_1 < \dots < i_m \leq m$
- c) $\omega_0 + \dots + \omega_m = 0$
- d) Es gibt meromorphe Differentialformen $\gamma_0, \dots, \gamma_m \in \mathbb{M}^1(U)$ derart, dass gilt:
- $$d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma_i \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

Im Falle $m = 2$ werden wir immer $(U, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ schreiben.

Beispiele

1) Sei f eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^m$, $m \geq 2$, deren partiellen Ableitungen f_{z_j} , $j = 1, \dots, m$ nicht identisch verschwinden. Dann ist

$(U, -df, f_{z_1} dz_1, \dots, f_{z_m} dz_m)$ eine meromorphe Gewebekarte.

2) Für $n \geq 1, \alpha \in \mathbb{C}^*$ definieren die Differentialformen

$$\omega_1 := (\alpha z - n w^n) dz \quad \omega_2 := -\alpha z dz - n z w^{n-1} dw$$

$$\omega_3 := n w^n dz - n z w^{n-1} dw \quad \text{auf } \mathbb{C}_{z,w}^2$$

ein meromorphes Gewebe $(\mathbb{C}^2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ auf $\mathbb{C}^2$. Dann es gilt

$$\text{mit } \gamma := \left(n \frac{\alpha z}{\alpha z^2 - n w^n} - \frac{1}{z} \right) dz + n^2 \frac{z w^{n-1}}{\alpha z^2 - n w^n} dw$$

$$d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

3) Die meromorphen Differentialformen

$$\omega_1 := \frac{1-z+w}{z} dz \quad \omega_2 := -\frac{1+w}{z} dz - dw \quad \omega_3 := dz + dw$$

bilden ein meromorphes 3-Gewebe auf $\mathbb{C}^2$, da

$$\omega_1 \wedge d(z + z^2/2) = 0, \quad \omega_2 \wedge d(z + zw) = 0, \quad \omega_3 \wedge d(z + w) = 0$$

4) Durch

$$\omega_1 := (z - w) w dz + (z - w) z dw$$

$$\omega_2 := -zw dz - (z + w) z dw$$

$$\omega_3 := w^2 dz + 2zw dw$$

wird eine meromorphe Gewebekarte $(\mathbb{C}^2, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ definiert, da

$$\gamma := \frac{z+w}{z-w} \left(\frac{dz}{z} + 2 \frac{dw}{w} \right) \text{ liefert: } d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma, i=1, 2, 3.$$

1.2 Lemma: (Strukturgleichungen von Geweben in $\mathbb{C}^2$: [5], S.25-26)

Sei $W = (U, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ein (meromorphes) Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^2$. Dann gilt:

a) Es gibt eindeutig bestimmte $\gamma \in \mathfrak{M}^1(U)$ und $K \in \mathfrak{M}^0(U)$, so dass:

$$d \omega_1 = \omega_1 \wedge \gamma \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$d \gamma = K \omega_1 \wedge \omega_2$$

b) Sei $\tilde{W} = (U, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)$ ein weiteres Gewebe mit zugehörigen $\tilde{\gamma}, \tilde{K}$. und es gelte $\tilde{\omega}_1 \wedge \omega_1 = 0$ für $i = 1, 2, 3$.

Dann gibt es eine nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion h auf U , so dass gilt:

$$\tilde{\omega}_1 = h \omega_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\gamma = \tilde{\gamma} + d \lg h$$

$$K = h^2 \tilde{K}$$

Beweis: Eindeutigkeit von γ :

Aus $d \omega_1 = \omega_1 \wedge \gamma = \omega_1 \wedge \hat{\gamma}$ folgt $\gamma - \hat{\gamma} = a \omega_1$

$$d \omega_2 = \omega_2 \wedge \gamma = \omega_2 \wedge \hat{\gamma} \quad \text{folgt } \gamma - \hat{\gamma} = b \omega_2$$

wegen 1.1 b) für geeignete $a, b \in \mathfrak{M}^0(U)$. Es folgt sofort $a = b = 0$.

Existenz von γ :

Es ist $d \omega_1 = a \omega_1 \wedge \omega_2$ und $d \omega_2 = b \omega_1 \wedge \omega_2$

für geeignete $a, b \in \mathfrak{M}^0(U)$ wegen 1.1 b).

$\gamma := a \omega_2 - b \omega_1 \in \mathfrak{M}^1(U)$ ist die gesuchte 1-Form.

Existenz und Eindeutigkeit von K ist offensichtlich (wegen 1.1 b))

Zu W und $\tilde{W}$:

Nach Lemma 0.9 gilt:

$$\tilde{\omega}_1 = h_1 \omega_1 \quad \text{für geeignete } 0 \neq h_1 \in \mathfrak{M}^0(U) \text{ für } i = 1, 2, 3$$

Dann folgt wegen 1.1 c)

$$h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 = -\tilde{\omega}_3 = -h_3 \omega_3 = h_3 (\omega_1 + \omega_2)$$

Also wegen 1.1 b) $h_1 = h \in \mathfrak{M}^0(U)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aus der Eindeutigkeit von $\tilde{\gamma}$ folgt wegen

$$\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\gamma} = d \tilde{\omega}_1 = d(h \omega_1) = dh \wedge \omega_1 + h \omega_1 \wedge \gamma = \tilde{\omega}_1 \wedge (\gamma - d \lg h)$$

$$\gamma = \tilde{\gamma} + d \lg h$$

Hieraus folgt:

$$K \omega_1 \wedge \omega_2 = d \gamma = d \tilde{\gamma} = \tilde{K} \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = h^2 \tilde{K} \omega_1 \wedge \omega_2$$

1.3 Lemma: (Strukturgleichungen von Geweben in $\mathbb{C}^m, m > 2$, vgl. [12])

Sei $W = (U, \omega_0, \dots, \omega_m)$ ein (meromorphes) Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^m$ mit $m > 2$. Dann gilt:

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte 1-Form $\gamma \in \mathbb{R}^1(U)$ sowie eindeutig bestimmte Funktionen $T_{ij}, K_{ij} \in \mathbb{R}^0(U)$ für $i, j = 1, \dots, m$ und $i \neq j$ so dass gilt:

$$d\omega_0 = \omega_0 \wedge \gamma$$

$$d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma + \sum_j T_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

$$d\gamma = \sum_{i < j} K_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \quad \text{mit} \quad \sum_{i,j} T_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad T_{ij} = T_{ji}$$

b) Sei $W = (U, \omega_0, \dots, \omega_m)$ ein weiteres Gewebe auf U mit zugehörigen $\tilde{\gamma}, \tilde{T}_{ij}, \tilde{K}_{ij}$ und es gelte $\tilde{\omega}_i \wedge \omega_i = 0$ für $i = 0, \dots, m$.

Dann gibt es eine nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion h auf U , so dass gilt:

$$\tilde{\omega}_i = h \omega_i \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

$$\gamma = \tilde{\gamma} + d \lg h$$

$$T_{ij} = h \tilde{T}_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m \quad i \neq j$$

$$K_{ij} = h^2 \tilde{K}_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m \quad i < j$$

Beweis: Zu a): Eindeutigkeit von γ : (für T_{ij}, K_{ij} nach 1.1 b) klar)

Aus $d\omega_0 = \omega_0 \wedge \gamma = \omega_0 \wedge \tilde{\gamma}$ folgt $\gamma = \tilde{\gamma} + a \omega_0$

mit geeignetem $a \in \mathbb{R}^0(U)$

$$\text{Aus } d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma + \sum_{j \neq i} T_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$= \omega_i \wedge \tilde{\gamma} + \sum_{j \neq i} \tilde{T}_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \quad \text{folgt:}$$

$$\gamma + \sum_{j \neq i} T_{ij} \omega_j = \tilde{\gamma} + \sum_{j \neq i} \tilde{T}_{ij} \omega_j + a_i \omega_i$$

$$= \tilde{\gamma} + \sum_{j \neq i} T_{ij} \omega_j + a \omega_0$$

mit geeigneten $a_i \in \mathbb{R}^0(U)$ für $i = 1, \dots, m$.

Nach 1.1 b), c) folgt dann sofort:

$$a = -a_i \quad \text{und} \quad \tilde{T}_{ij} = T_{ij} - a \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m \quad i \neq j$$

Andrerseits ist

$$0 = \sum_{i,j} \tilde{T}_{ij} = \sum_{i,j} (T_{ij} - a) = 0 - (m-1)m a$$

Also muss $a = 0$ sein und somit ist γ eindeutig.

Existenz von γ :

Nach 1.1 d) gilt:

$$d\omega_0 = \omega_0 \wedge \gamma_0$$

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_1 \wedge \gamma_1 = \omega_1 \wedge \gamma_0 + \omega_1 \wedge (\gamma_1 - \gamma_0) \\ &= \omega_1 \wedge \gamma_0 + \sum_j a_{1j} \omega_1 \wedge \omega_j \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

mit geeigneten $a_{ij} \in \mathbb{R}^0(U)$ für $i, j = 1, \dots, m$ $i \neq j$.

Sei $(m-1)m a := \sum_{i,j} a_{ij} \in \mathbb{R}^0(U)$, dann folgt

$$\gamma := \gamma_0 - a \omega_0 \in \mathbb{R}^1(U)$$

$$T_{ij} := a_{ij} - a \in \mathbb{R}^0(U) \quad \text{die Behauptung.}$$

$\sum_{i,j} T_{ij} = 0$ ist klar und $T_{ij} = T_{ji}$ folgt so:

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\sum_{i=0}^m \omega_i\right) = \sum_{i=0}^m \omega_i \wedge \gamma + \sum_{i,j} T_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \\ &= 0 + \sum_{i < j} (T_{ij} - T_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j \quad (\text{mit 1.1 b) }) \end{aligned}$$

Zu $\tilde{W}$ und $\tilde{W}$:

Nach Lemma 0.9 gibt es für $i = 0, \dots, m$ meromorphe nicht identisch verschwindende Funktionen h_i auf U , so dass

$$\tilde{\omega}_i = h_i \omega_i \quad (i = 0, \dots, m)$$

Wegen 1.1 c) folgt

$$\sum_{i=1}^m h_i \omega_i = -\tilde{\omega}_0 = -h_0 \omega_0 = h_0 \sum_{i=1}^m \omega_i$$

Also folgt wegen 1.1 b) $h_i = h \in \mathbb{R}^0(U)$ für $i = 0, \dots, m$

Wegen der Eindeutigkeit von γ, T_{ij} folgt mithilfe 1.1 b) aus

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\gamma} + \sum_{i,j} \tilde{T}_{ij} \tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_j &= d\tilde{\omega}_1 = dh \wedge \omega_1 + h d\omega_1 \\ &= \tilde{\omega}_1 \wedge (\gamma - d \lg h) + \sum_{i,j} h^{-1} T_{ij} \omega_i \wedge \omega_j \end{aligned}$$

$$\gamma = \tilde{\gamma} + d \lg h \quad \text{und} \quad T_{ij} = h \tilde{T}_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m \quad i \neq j$$

Ausserdem folgt dann aus

$$\sum_{i < j} K_{ij} \omega_i \wedge \omega_j = d\gamma = d\tilde{\gamma} = \sum_{i < j} \tilde{K}_{ij} \tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_j = h^2 \sum_{i < j} \tilde{K}_{ij} \omega_i \wedge \omega_j$$

$$K_{ij} = h^2 \tilde{K}_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, m \quad i < j \quad (\text{wegen 1.1 b) })$$

Im Folgenden werden die Halbinvariantensysteme von meromorphen Geweben bestimmt:

1.4 Lemma: (Halbinvariantensystem von Geweben in $\mathbb{C}^2$ vgl. [5], §'2)

Sei $W = (U, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ein meromorphes Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^2$ mit $K \neq 0$.

a) Dann gibt es ein System meromorpher Funktionen auf U

$$\mathfrak{K}_W = (K_{I_s} \in \mathbb{R}^0(U) : I_s \in \{1, 2, 3\}^s \text{ für } s \in \mathbb{N}, K_{I_0} := K)$$

so dass gilt:

$$d K_{I_s} - (s+2) K_{I_s} \gamma = K_{I_s 2} \omega_1 - K_{I_s 1} \omega_2$$

$$K_{I_s 1} + K_{I_s 2} + K_{I_s 3} = 0,$$

wobei die Bezeichnungsweise in folgendem Sinn gemeint ist:

Ist $I_s = (i_1 i_2 \dots i_s)$ mit $i_\sigma \in \{1, 2, 3\}, \sigma = 1, \dots, s \in \mathbb{N}$

so sei $I_{s,j} := (i_1 \dots i_{s,j})$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ ein weiteres I_{s+1} .

b) Ist $\tilde{W} = (U, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)$ ein weiteres Gewebe auf U mit $\tilde{K} \neq 0$ und $\tilde{\omega}_1 \wedge \omega_1 = 0$ für $i = 1, 2, 3$.

Dann gibt es eine nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion h auf U , so dass für die Elemente der Halbinvariantensysteme $\mathfrak{K}_W$ und $\mathfrak{K}_{\tilde{W}}$ von W und $\tilde{W}$ gilt:

$$K_{I_s} = h^{s+2} \tilde{K}_{I_s} \quad \text{für jedes } I_s \in \{1, 2, 3\}^s, s \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Definition von K_{I_s} durch Induktion nach $s = 0, 1, \dots$

$K_{I_0} := K$ genügt nach Lemma 1.2 a) und b).

$s = 1$:

Wegen 1.1 b) sind die $K_{I_1} \in \{K_1, K_2, K_3\}$ durch

$$d K - 2 K \gamma = K_2 \omega_1 - K_1 \omega_2 = K_1 \omega_3 - K_3 \omega_1$$

als meromorphe Funktionen auf U definiert und erfüllen a):

$$K_2 \omega_1 - K_1 \omega_2 = K_2 \omega_1 + K_1 (\omega_1 + \omega_3) = K_1 \omega_3 + (K_1 + K_2) \omega_1$$

wegen 1.1 b), c) folgt also: $K_1 + K_2 + K_3 = 0$.

Andrerseits nach 1.2 b) gibt es $0 \neq h \in \mathbb{R}^0(U)$ mit

$$\tilde{\omega}_1 = h \omega_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3. \text{ Damit folgt:}$$

$$\begin{aligned} K_2 \omega_1 - K_1 \omega_2 &= d K - 2 K \gamma \\ &= d(h^2 \tilde{K}) - 2 h^2 \tilde{K} (\tilde{\gamma} + d \lg h) \quad (\text{nach 1.2 b)}) \\ &= h^2 (d \tilde{K} - 2 \tilde{K} \tilde{\gamma}) = h^2 (\tilde{K}_2 \tilde{\omega}_1 - \tilde{K}_1 \tilde{\omega}_2) \\ &= h^3 (\tilde{K}_2 \omega_1 - \tilde{K}_1 \omega_2) \end{aligned}$$

Also folgt nach 1.1 b): $K_1 = h^3 \tilde{K}_1$ für $i = 1, 2, 3$

$s \rightarrow s+1$:

Es seien die Funktionen K_{I_s} gemäss a) und b) bereits wohl-definiert.

Zu jedem festen K_{I_s} werden durch

$$d K_{I_s} - (s+2) K_{I_s} \gamma = K_{I_s 2} \omega_1 - K_{I_s 1} \omega_2 = K_{I_s 1} \omega_3 - K_{I_s 3} \omega_1$$

wegen 1.1 b) meromorphe Funktionen $K_{I_s j}, j = 1, 2, 3$ auf U definiert, die a) und b) erfüllen.

Da die Rechnung völlig analog zum Fall $s = 1$ geht, wird hier auf die Ausführung verzichtet.

Bezeichnungen:

Die Funktionen K_{I_s} werden Halbinvarianten vom Gewicht $s+2$ des Gewebes W oder auch als s -te halbinvariante Ableitungen der "Krümmungsfunktion" K bezeichnet.

Explizite Berechnungen für Beispiel 1 von S.5: Gewebekarte W_f .

Sei f eine meromorphe Funktion auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}_{z,w}^2$, deren partielle Ableitungen f_z und f_w nicht identisch auf U verschwinden.

Dann ist $W_f = (U, -df, f_z dz, f_w dw)$ meromorphe Gewebekarte

$$\text{mit} \quad \gamma = -f_{zw} (f_w^{-1} dz + f_z^{-1} dw)$$

$$K = (l_E (f_w f_z^{-1}))_{zw} f_z^{-1} f_w^{-1}$$

$$\text{a) } K \neq 0: K_1 = -K_w f_w^{-1} - 2 K f_{zw} f_z^{-1} f_w^{-1}$$

$$K_2 = K_z f_z^{-1} + 2 K f_{zw} f_z^{-1} f_w^{-1}$$

$$K_3 = K_w f_w^{-1} - K_z f_z^{-1}$$

und für $K_{I_s j}, j = 1, 2, 3$ gilt:

$$K_{I_s 1} = - (K_{I_s})_w f_w - (s+2) K_{I_s} f_{zw} f_z^{-1} f_w^{-1}$$

$$K_{I_s 2} = (K_{I_s})_z f_z + (s+2) K_{I_s} f_{zw} f_z^{-1} f_w^{-1}$$

$$K_{I_s 3} = (K_{I_s})_w f_w - (K_{I_s})_z f_z$$

b) K verschwindet identisch auf U:

$$\lg(f_z^{-1} f_w)_{zw} = 0 \quad (\text{DGL von de Saint-Robert, [14], S.277}).$$

Man kann leicht zeigen, dass es eine offene zusammenhängende Menge $V \subset U$ gibt, sowie holomorphe Funktionen

$$a \in \mathcal{Q}^0(\text{pr}_1(V)), b \in \mathcal{Q}^0(\text{pr}_2(V)), c \in \mathcal{Q}^0(a(\text{pr}_1(V)) + b(\text{pr}_2(V)))$$

so dass gilt:

$$f(z, w) = c(a(z) + b(w)) \quad \text{auf } V.$$

1.5 Definition

a) Ein meromorphes Gewebe $W = (U, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^2$ werde lineares Gewebe genannt, falls die "Krümmungsfunktion" K von W identisch auf U verschwindet.

b) Ein meromorphes Gewebe $W = (U, \omega_1, \dots, \omega_m)$ auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^m, m > 2$ werde lineares Gewebe genannt, falls alle Funktionen T_{ij}, K_{ij} (vgl. 1.3 a)) identisch auf U verschwinden.

Lineare Gewebe in unserem Sinn werden in der Literatur oft "octahedral" (s. [9]) oder "parallelisierbar" (s. [14], S.275) genannt, (es ist der "flat case" des zugehörigen Zusammenhangs, s.a. 2.3): Solche Gewebe sind lokal fast überall auf Gewebe aus parallelen Hyperebenenstücken abbildbar. Wir weichen hier von der Bezeichnungweise "linear web" in [9] ab: Jene sind lokal zu Geweben aus nicht notwendigerweise parallelen Hyperebenenstücken äquivalent.

1.6 Lemma: (Halbinvariantensystem von Geweben in $\mathbb{C}^m, m > 2$)

Sei $W = (U, \omega_1, \dots, \omega_m)$ ein meromorphes nicht lineares Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^m, m > 2$.

Dann gibt es ein nichttriviales System meromorpher Funktionen

$$\mathfrak{F}_W = (T_{ij, I_s}, K_{ij, I_s} \in \mathcal{R}^0(U); I_s \in \{1, \dots, m\}^s, s \in \mathbb{N}, T_{ij, I_0} := T_{ij}, K_{ij, I_0} := K_{ij})$$

so dass gilt:

$$d T_{ij, I_s} - (s+1) T_{ij, I_s} \gamma = \sum_{k=1}^m T_{ij, I_s k} \omega_k$$

$$d K_{ij, I_s} - (s+2) K_{ij, I_s} \gamma = \sum_{k=1}^m K_{ij, I_s k} \omega_k$$

wobei die Bezeichnungweise in folgendem Sinn gemeint ist:

Ist $I_s = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ mit $i_\sigma \in \{1, \dots, m\}, \sigma = 1, \dots, s \in \mathbb{N}$

so sei $I_s k := (i_1, \dots, i_s, k)$ für $k \in \{1, \dots, m\}$

b) Sei $\tilde{W} = (\tilde{U}, \tilde{\omega}_0, \dots, \tilde{\omega}_m)$ ein weiteres nichtlineares Gewebe auf U mit $\tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_1 = 0$ für $i = 0, \dots, m$.

Dann gibt es eine meromorphe nicht identisch verschwindende Funktion h auf U , so dass für die Elemente der Halbinvariantensysteme $\mathcal{S}_W$ und $\mathcal{S}_{\tilde{W}}$ von W und $\tilde{W}$ gilt:

$$T_{1j, I_s} = h^{s+1} \tilde{T}_{1j, I_s} \quad \text{sowie} \quad K_{1j, I_s} = h^{s+2} \tilde{K}_{1j, I_s}$$

für alle $I_s \in \{1, \dots, m\}$, $s \in \mathbb{N}$.

Beweis: Definition von T_{1j, I_s}, K_{1j, I_s} durch Induktion nach $s = 0, 1, \dots$

$s = 0$:

$$T_{1j, I_0} := T_{1j} \quad \text{für } 1, j = 1, \dots, m \quad i \neq j$$

$$K_{1j, I_0} := K_{1j} \quad \text{für } 1, j = 1, \dots, m \quad i < j$$

genügen wegen Lemma 1.3 den Behauptungen a) und b).

Da W nicht lineares Gewebe ist, befindet sich unter ihnen mindestens eine nicht identisch verschwindende Funktion. Somit ist das Halbinvariantensystem von W nichttrivial.

$s = 1$:

Wegen 1.1 b) werden durch

$$dT_{1j} - T_{1j} \gamma = \sum_{k=1}^m T_{1j, k} \omega_k \quad \text{für } 1, j = 1, \dots, m \quad i \neq j$$

$$dK_{1j} - 2K_{1j} \gamma = \sum_{k=1}^m K_{1j, k} \omega_k \quad \text{für } 1, j = 1, \dots, m \quad i < j$$

meromorphe Funktionen auf U definiert, die a) genügen.

Nach 1.3 b) gibt es ein $0 \neq h \in \mathbb{R}^0(U)$ mit

$$\tilde{\omega}_1 = h \omega_1 \quad \text{für } i = 0, \dots, m. \text{ Damit folgt:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m T_{1j, k} \omega_k &= dT_{1j} - T_{1j} \gamma \\ &= d(h \tilde{T}_{1j}) - h \tilde{T}_{1j} (\tilde{\gamma} + d \lg h) \\ &= \tilde{T}_{1j} dh + h d\tilde{T}_{1j} - h \tilde{T}_{1j} \tilde{\gamma} - \tilde{T}_{1j} dh \\ &= h (d\tilde{T}_{1j} - \tilde{T}_{1j} \tilde{\gamma}) \\ &= h \sum_{k=1}^m \tilde{T}_{1j, k} \tilde{\omega}_k = h^2 \sum_{k=1}^m \tilde{T}_{1j, k} \omega_k \end{aligned}$$

Offenbar kann man in analoger Weise eine entsprechende Gleichung für $K_{1j, k}$ nachrechnen. Somit ist b) gezeigt (wegen 1.1 b)).

$s \rightarrow s+1$:

Es seien die Funktionen T_{ij, I_s} und K_{ij, I_s} bereits gemäß a) und b) definiert.

Zu jedem festen $I_s = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ mit $i_\sigma \in \{1, \dots, m\}$, $\sigma = 1, \dots, s$ mit den zugehörigen wohldefinierten Funktionen T_{ij, I_s} und K_{ij, I_s} gilt wegen 1.1 b): Durch die Gleichungen

$$d T_{ij, I_s} - (s+1) T_{ij, I_s} \gamma = \sum_{k=1}^m T_{ij, I_s k} \omega_k$$

$$d K_{ij, I_s} - (s+2) K_{ij, I_s} \gamma = \sum_{k=1}^m K_{ij, I_s k} \omega_k$$

werden meromorphe Funktionen $T_{ij, I_s k}$ $i, j, k = 1, \dots, m$ $i \neq j$

sowie $K_{ij, I_s k}$ $i, j, k = 1, \dots, m$ $i < j$

auf U definiert, die a) genügen.

Die Eigenschaft b) kann man in analoger Weise wie eben sofort nachrechnen.

Die meromorphen Funktionen T_{ij, I_s} und K_{ij, I_s} nennt man wegen b) Halbinvarianten von Gewicht $s+1$ bzw. $s+2$ des Gewebes W oder s -te halbinvarianten Ableitungen von T_{ij} bzw. K_{ij} .

Die Halbinvariantensysteme $\mathfrak{H}_W$ von Geweben W auf Gebieten $U \subset \mathbb{C}^m$ für $m \geq 2$ können noch durch Hinzunahme gewisser meromorpher Funktionen (die aus Funktionen von $\mathfrak{H}_W$ durch Linearkombinationen (bei gleichem Gewicht) oder Produktbildungen oder endliche Kombinationen aus diesen beiden Möglichkeiten gewonnen werden) so erweitert werden, dass die Eigenschaft b) erhalten bleibt.

Da dies in dieser Arbeit eine entscheidende Rolle spielt, werden die eben angedeuteten Möglichkeiten zur Gewinnung zusätzlicher Halbinvarianten in der folgenden Bemerkung genauer ausgeführt.

Insbesondere möchten wir hier noch betonen, dass die durch Quotientenbildung gewonnenen Halbinvarianten nicht allgemein für jedes Gewebe sinnvoll definiert werden können, sie existieren nur für jene, bei denen die Nennerhalbinvariante $\neq 0$ ist!

1.7 Bemerkungen:

Sei W ein nicht lineares meromorphes Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^m$ mit $m \geq 2$.

a) Linearkombinationen von Halbinvarianten

Seien $L_k, k = 1, \dots, r$ Halbinvarianten von gleichem Gewicht 1 aus $\mathcal{G}_W$ und seien $a_k, k = 1, \dots, r$ komplexe Zahlen. Dann ist

$$L := \sum_{k=1}^r a_k L_k \in \mathbb{R}^0(U)$$

eine Halbinvariante von Gewicht 1, d.h.:

Ist $\tilde{W}$ ein weiteres Gewebe auf U mit $\tilde{\omega}_1 = h \omega_1, 0 \neq h \in \mathbb{R}^0(U)$ und den entsprechenden Halbinvarianten $\tilde{L}_k, k = 1, \dots, r$, so gilt:

$$L = \sum_{k=1}^r a_k L_k = \sum_{k=1}^r a_k (h^1 \tilde{L}_k) = h^1 \sum_{k=1}^r a_k \tilde{L}_k = h^1 \tilde{L}$$

b) Produkte von Halbinvarianten

Seien L und N Halbinvarianten von Gewicht 1 bzw. n . Dann ist

$$P := L N \in \mathbb{R}^0(U)$$

eine Halbinvariante von Gewicht $p = 1 + n$.

Dies kann man sich analog wie eben überlegen.

c) Quotienten von Halbinvarianten

Seien L und N Halbinvarianten von Gewicht 1 bzw. n .

Ausserdem verschwinde N nicht identisch auf U . Dann ist

$$Q := L N^{-1} \in \mathbb{R}^0(U)$$

eine Halbinvariante von Gewicht $q = 1 - n$.

Dies ist offenbar leicht nachzurechnen.

d) Es gilt also:

Die Menge aller möglichen Halbinvarianten von W mit festem Gewicht $l \in \mathbb{Z}$ ist ein komplexer Vektorraum.

Die Menge aller Halbinvarianten von W , die sich durch iterierte Anwendungen von a), b), c) bilden lassen, soll mit $\mathcal{G}_W^*$ bezeichnet werden.

Offensichtlich lässt sich jedes Element von $\mathcal{G}_W^*$ als eine endliche Linearkombination von Quotienten aus Linearkombinationen von Produkten von Elementen aus $\mathcal{G}_W$ anschreiben.

Vergleiche hierzu auch II 2.1.

e) Invarianten

Halbinvarianten von Gewicht 0 werden (absolute) Invarianten genannt und sollen später noch eine wichtige Rolle spielen. Es ist deshalb wichtig, ob es solche überhaupt gibt. Bei linearen Geweben ist es schlechterdings unmöglich, doch diese füllen innerhalb der meromorphen Gewebe eine Sonderrolle aus, die in einem anderen Paragraphen dargestellt wird. Für nicht lineare Gewebe könnte man aufgrund von 1.7 c) sicher nichttriviale Invarianten konstruieren, sofern mindestens zwei verschiedene (nicht voneinander abhängige) Halbinvarianten L, N von Gewicht 1 bzw. n existieren, die nicht identisch verschwinden. Dann definiert nämlich

$$J := L^n N^{-1} \quad \text{eine Invariante.}$$

Im Folgenden sollen einige Aussagen die naheliegendsten Halbinvarianten $K, K_1, K_2, K_3, K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ (im 2-dimensionalen Fall) bzw. $T_{ij}, T_{ij,k}, T_{ij,kl}, K_{ij}, K_{ij,k}, K_{ij,kl}$ (im höherdimensionalen Fall) etwas beleuchten, da ja in konkreten Fällen diese bestenfalls berechenbar sind.

1.8 Lemma: [7], S. 214

Sei $W = (U, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ein meromorphes Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^2$ mit nicht identisch verschwindender Krümmungsfunktion $K \in \mathfrak{R}^0(U)$ (dh. W ist nichtlineares Gewebe). Dann gilt:

$$K_{12} - K_{21} = 2 K^2 \quad \text{auf } U \text{ (für die 2. gemischten halbinvarianten Ableitungen } K_{12}, K_{21} \in \mathfrak{R}^0(U) \text{ von } K \text{).}$$

Beweis: (in [7] wird der Beweis mit lokaler Normalform geführt).

Nach 0.2 b) gilt: $d(dK) = 0$.

Mithilfe der Definition von $K_1, K_2, K_{11}, \dots, K_{22}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= d(2 K \gamma + K_2 \omega_1 - K_1 \omega_2) \\ &= 4 K \gamma \wedge \gamma + 2 K_2 \omega_1 \wedge \gamma - 2 K_1 \omega_2 \wedge \gamma + 2 K^2 \omega_1 \wedge \omega_2 + \\ &\quad + 3 K_2 \gamma \wedge \omega_1 - 3 K_1 \gamma \wedge \omega_2 + K_{22} \omega_1 \wedge \omega_1 + K_{21} \omega_1 \wedge \omega_2 + \\ &\quad + K_2 \omega_1 \wedge \gamma - K_1 \omega_2 \wedge \gamma - K_{12} \omega_1 \wedge \omega_2 + K_{11} \omega_2 \wedge \omega_2 \\ &= (2 K_2 - 3 K_2 + K_2) \omega_1 \wedge \gamma + (3 K_1 - 2 K_1 - K_1) \omega_2 \wedge \gamma + \\ &\quad + (2 K^2 + K_{21} - K_{12}) \omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Nach 1.1 b) folgt die Aussage.

1.9 Folgerung:

Sei $W = (U, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ein meromorphes nichtlineares Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^2$.

Dann ist mindestens eine der wohldefinierten Invarianten

$$I_j := K_j^2 K^{-3} \in \mathbb{R}^0(U) \quad \text{für } j = 1, 2, (3)$$

nicht konstant.

Beweis: Angenommen, es gibt $a, b \in \mathbb{C}$ mit

$$K_1^2 = a K^3 \quad \text{und} \quad K_2^2 = b K^3 \quad \text{auf } U,$$

so folgt aus $da = 0$ und $db = 0$:

$$2KdK_1 - 3K_1dK = 0 \quad \text{und} \quad 2KdK_2 - 3K_2dK = 0$$

Direktes Ausrechnen (wie in Beweis zu 1.8) liefert:

$$\begin{aligned} 2KK_{12} - 3K_1K_2 &= 0 & 2KK_{22} - 3K_2^2 &= 0 \\ \text{bzw.} & & & \\ 2KK_{11} - 3K_1^2 &= 0 & 2KK_{21} - 3K_1K_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wenn man die Gleichungen mit den Mischtermen K_{12}, K_{21} von einander subtrahiert, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 2KK_{12} - 2KK_{21} \\ &= 2K(2K^2) \quad \text{wegen 1.8} \end{aligned}$$

ein Widerspruch zur Nichtlinearität von W !

Also hat ein nichtlineares Gewebe auf einem Gebiet U in $\mathbb{C}^2$ mindestens eine nichtkonstante meromorphe Invariantenfunktion I_{i_0} mit $i_0 \in \{1, 2\}$.

Es gibt übrigens wesentliche und unwesentliche Invarianten. Unwesentliche Invarianten sind für alle Gewebe auf U gleich und liefern so keinerlei Information über die Verschiedenheit von vorgelegten Geweben, zB.:

$$J := (K_{12} - K_{21}) K^{-2} = 2 \quad \text{in jedem Fall (wegen 1.8)}$$

$$J' := (K_3^2 - (K_1 + K_2)^2) K^{-3} = 0 \quad \text{immer (da } K_1 + K_2 + K_3 = 0)$$

Man bemerkt also, dass man aus K, K_1, K_2, K_3 höchstens zwei wesentliche Invariantenfunktionen gewinnen kann.

Ein Beispiel mit einer wesentlichen konstanten Invarianten ist:

$$W_f \text{ auf } \mathbb{C}^2 \text{ mit } f(z, w) := e^z + e^z(2w - z)^{-1}$$

$$\text{liefert } J := K_3 K_1^{-1} = 0 \quad \text{vgl. [6], S.160-1, [7], S.213-214.}$$

Im allgemeinen ist J nicht konstant.

Bei späteren Anwendungen wird folgendes Lemma über konstante Invarianten eine wichtige Rolle spielen. Es macht eine Aussage darüber, wieviele verschiedene konstante Invarianten man mit Hilfe linearer Ausdrücke in den $K_1^2, K_1 K_2, K_2^2, K^3$ erhalten kann.

1.10 Lemma:

Sei $W = (U, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ein meromorphes nicht lineares Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^2$ mit nicht identisch verschwindenden K_1, K_2 .

Dann gilt genau einer der folgenden drei Fälle:

a) Es gibt keine konstante Invariante von der Form

$$J := (aK_1^2 + bK_2^2 + cK_1 K_2) K^{-3} \text{ mit } (a, b, c) \neq (0, 0, 0); a, b, c \in \mathbb{C}$$

b) Es gibt genau ein $(a, b, c) \neq (0, 0, 0); a, b, c \in \mathbb{C}$, so dass

$$J := (aK_1^2 + bK_2^2 + cK_1 K_2) K^{-3} = 1$$

c) Es gibt $d \in \mathbb{C}$ mit $J' := K_1 K_2^{-1} = d$.

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, dass aus der Verletzung von a) und b) die Aussage c) folgt. ($J = 0$ liefert analog c)!))

$$\text{Seien } I_1 := K_1 K^{-3}, I_2 := K_2 K^{-3}, I := K_1 K_2 K^{-3} \in \mathbb{R}^0(U).$$

Angenommen, es gibt $(a_1, a_2, a_3) \neq (b_1, b_2, b_3)$ mit $a_1, \dots, b_3 \in \mathbb{C}$ so dass:

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + a_3 I = b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I = 1$$

Also folgt mit $A_1 := a_1 - b_1, 1 = 1, 2, 3$ wegen $K_2 \neq 0$:

$$A_1 I_1 + A_2 I_2 + A_3 I = 0 \quad \text{bzw.} \quad A_2 + A_3 (K_1 K_2^{-1}) + A_1 (K_1 K_2^{-1})^2 = 0$$

Da kein I_1, I_2, I identisch verschwinden kann (nach Voraussetzung) und $(A_1, A_2, A_3) \neq (0, 0, 0)$, müssen mindestens zwei der $A_1 \neq 0$ sein. Die Gleichung

$$A_2 + A_3 x + A_1 x^2 = 0 \quad \text{hat Lösungen } d_1, d_2 \in \mathbb{C}, \text{ bzw. } d \in \mathbb{C}^*.$$

Dies bedeutet, es gibt d mit $K_1 K_2^{-1} = d$.

Die Voraussetzung ' K_1 und K_2 nicht identisch verschwindend' ist keine wesentliche Einschränkung:

Nach 1.9 kann sowieso höchstens eines der $K_i \equiv 0$ sein.

$$\text{Falls } K_1 \equiv 0 \text{ ist, betrachte man } W_\sigma := (U, \omega_{\sigma(1)}, \omega_{\sigma(2)}, \omega_{\sigma(3)})$$

$$\text{falls } K_2 \equiv 0 \text{ ist, betrachte man } W_\tau := (U, \omega_{\tau(1)}, \omega_{\tau(2)}, \omega_{\tau(3)})$$

mit $\sigma := \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$ bzw. $\tau := \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$ und entsprechende Aussagen.

Es folgen nun einige Aussagen über wesentliche und unwesentliche Invarianten höherdimensionaler Gewebe:

1.11 Lemma:

Sei $W = (U, \omega_0, \dots, \omega_m)$ ein meromorphes nicht lineares Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^m$ mit $m > 2$.

Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$a) \quad T_{ij} K_{kl} + T_{ij,kl} - T_{ij,lk} + T_{kl} (T_{ij,k} - T_{ij,l}) = 0$$

$$b) \quad 2K_{ij} K_{kl} + K_{ij,kl} - K_{ij,lk} + T_{kl} (K_{ij,k} - K_{ij,l}) = 0$$

für $i, j, k, l = 1, \dots, m$ mit $i < j$ und $k < l$.

Beweis: Wegen $d(d T_{ij}) = 0$ (s. o. 2 b)) und Definition der $T_{ij,k}, \dots, K_{ij,kl}$ (s. 1.6) folgt durch Rechnung:

$$\begin{aligned} 0 &= d T_{ij} \wedge \gamma + T_{ij} d \gamma + \sum_{k=1}^m d T_{ij,k} \wedge \omega_k + \sum_{k=1}^m T_{ij,k} d \omega_k \\ &= \sum_{k=1}^m T_{ij,k} \omega_k \wedge \gamma + \sum_{k < l} T_{ij} K_{kl} \omega_k \wedge \omega_l + 2 \sum_{k=1}^m T_{ij,k} \gamma \wedge \omega_k + \\ &\quad + \sum_{k,l} T_{ij,kl} \omega_l \wedge \omega_k + \sum_{k=1}^m T_{ij,k} \omega_k \wedge \gamma + \sum_{k,l} T_{ij,k} T_{kl} \omega_k \wedge \omega_l \\ &= \sum_{k < l} (T_{ij} K_{kl} + T_{ij,kl} - T_{ij,lk} + T_{ij,k} T_{kl} - T_{ij,l} T_{kl}) \omega_l \wedge \omega_k \end{aligned}$$

Wegen $T_{lk} = T_{kl}$ folgt a). Analog lässt sich b) ausrechnen.

Zur Existenz von nichttrivialen Invarianten:

Sei $W = (U, \omega_0, \dots, \omega_m)$ meromorphes nicht lineares Gewebe auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}^m, m > 2$. Dann gibt es nach Definition 1.5 b) mindestens eine Halbinvariante unter den meromorphen Funktionen T_{ij}, K_{ij} , die nicht identisch auf U verschwindet.

Hiermit lässt sich leicht eine nichttriviale Invariante finden:

a) Es gebe ein $T_{ij} \neq 0$ mit $i \neq j; i, j \in \{1, \dots, m\}$

Wegen $\sum_{s,t} T_{st} = 0$ und $T_{ij} = T_{ji}$ muss es $(i, j) \neq (k, l) \neq (j, i)$

mit $T_{kl} \neq 0$ und $k \neq l; k, l \in \{1, \dots, m\}$ geben.

Somit ist $J := T_{ij} (T_{kl})^{-1}$ eine wohldefinierte Invariante von W .

b) Es gebe ein $K_{ij} \neq 0$ mit $1 < j; i, j \in \{1, \dots, m\}$. Also ist $d\gamma \neq 0$. Es gibt mindestens ein $K_{ij,k} \neq 0$, ansonsten würde gelten:

$$d K_{ij} - 2 K_{ij} \gamma = 0 \rightarrow 0 = 2 d K_{ij} \wedge \gamma + 2 K_{ij} d \gamma = 2 K_{ij} d \gamma$$

also ein Widerspruch. Somit ist $J := K_{ij,k}^2 K_{ij}^{-3}$ eine Invariante.

§2 Invarianten von meromorphen Geweben auf komplexen Mannigfaltigkeiten

In diesem Paragraphen werden meromorphe Gewebe auf komplexen offenen zusammenhängenden endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten eingeführt und ihnen gewisse meromorphe projektive Zusammenhänge (projective connections) zugeordnet, hierzu wird die "working definition" von projektiven Zusammenhängen aus [9], [11] benutzt. Schliesslich werden Invarianten (die aus lokalen Halbinvarianten von Gewicht 0 gewonnen werden) betrachtet und auf ihre Rolle bei der Äquivalenz von Geweben eingegangen.

Im Folgenden wird, ohne dass dies ausführlich erwähnt wird, unter einer komplexen Mannigfaltigkeit immer eine komplexe zusammenhängende endlichdimensionale Mannigfaltigkeit verstanden.

2.1 Definition

Sei M eine m -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit $m > 2$.

Ein meromorpher Gewebeatlas (auch kurz als $(m+1)$ -Gewebe auf M bezeichnet) ist eine Familie $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ derart, dass:

- a) $\mathbb{A} := (U_a)_{a \in A}$ ist eine offene Überdeckung von M .
- b) Für jedes $a \in A$ ist $W_a = (U_a, \omega_0^a, \dots, \omega_m^a, \gamma^a)$ für $m > 2$
bzw. $(U_a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a)$ für $m = 2$

meromorphe Gewebekarte (vgl. I 1.1). Um ferner Verweise auf I 1.2/3 zu vermeiden, sei γ^a mit hinzugenommen. Explizit gilt also:

- $\omega_0^a, \dots, \omega_m^a, \gamma^a \in \mathbb{R}^1(U_a)$ für $m > 2$, bzw. $\omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a \in \mathbb{R}^1(U_a)$: $m = 2$
- $\omega_{i_1}^a \wedge \dots \wedge \omega_{i_m}^a \neq 0$ auf U_a für alle Anordnungen $i_1 < \dots < i_m$
- $\omega_0^a + \dots + \omega_m^a = 0$ für $m > 2$ bzw. $\omega_1^a + \omega_2^a + \omega_3^a = 0$ für $m = 2$
- $d \omega_1^a = \omega_1^a \wedge \gamma^a$ und $d \gamma^a = K^a \omega_1^a \wedge \omega_2^a$ mit $K^a \in \mathbb{R}^0(U_a)$: $m = 2$
 $d \omega_1^a = \omega_1^a \wedge \gamma^a + \sum_{j=1}^m T_{1j}^a \omega_1^a \wedge \omega_j^a$ und $d \gamma^a = \sum_{i < j} K_{ij}^a \omega_i^a \wedge \omega_j^a$
für gewisse $T_{ij}^a, K_{ij}^a \in \mathbb{R}^0(U_a)$ falls $m > 2$.

Als Verträglichkeitsbedingung an die Gewebekarten gelte noch:

c) Falls $U_{ab} := U_a \cap U_b \neq \emptyset$ für $a, b \in A$, so gilt für die auf U_{ab} eingeschränkten Gewebe $W_{a/U_{ab}}$ und $W_{b/U_{ab}}$:

Es gibt eine nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion h^{ab} auf (jeder Zusammenhangskomponente von) U_{ab} mit

$$\omega_i^b = h^{ab} \omega_i^a \quad \text{für } i = 0, \dots, m \text{ bzw. } i = 1, 2, 3 \text{ auf } U_{ab}$$

$$\gamma^b = \gamma^a - d \lg h^{ab} \quad \text{auf } U_{ab}$$

(dies ist äquivalent damit, dass $\omega_1^b \wedge \omega_1^a = 0$ auf U_{ab} !)

Übrigens kann man die Überdeckung $\mathcal{B}$ immer als eine Familie von Karten von M wählen (man verfeinert die gegebene Überdeckung geeignet und schränkt die lokalen Gewebe darauf ein.) Aus c) kann man leicht (vgl. die analogen Passagen in §1) folgern, dass für die lokalen Halbinvarianten von W_a und W_b auf (den Zusammenhangskomponenten von) U_{ab} gilt:

$$K^b = (h^{ab})^2 K^a \quad \text{falls } m = 2$$

$$T_{ij}^b = h^{ab} T_{ij}^a \quad \text{und} \quad K_{ij}^b = (h^{ab})^2 K_{ij}^a \quad \text{falls } m > 2.$$

und natürlich entsprechendes für die auf U_{ab} eingeschränkten Elemente der lokalen Halbinvariantensysteme $\mathcal{S}_{W_a}^*$ und $\mathcal{S}_{W_b}^*$.

2.2 Definition: (von meromorphen projektiven Zusammenhängen)

Es M eine m -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit $m \geq 2$.

Ein meromorpher projektiver Zusammenhang auf M ist eine Familie $\Delta = (U_a, \mathcal{V}_a)_{a \in A}$, derart, dass:

a) $\mathcal{B} := (U_a)_{a \in A}$ ist offene Überdeckung von M

b) Für jedes $a \in A$ ist $\mathcal{V}_a = (\mathcal{V}_{ij}^a)_{i,j=0,\dots,m}$ eine Matrix von meromorphen 1-Formen auf U_a .

c) Falls $U_{ab} := U_a \cap U_b \neq \emptyset$ für $a, b \in A$, so gilt:

Es gibt eine nichtsinguläre Matrix meromorpher Funktionen

$S^{ab} = (s_{ij}^{ab})_{i,j=0,\dots,m}$ auf (jeder Zusammenhangskomponente von;

von) U_{ab} , so dass gilt:

$$s_{0j}^{ab} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, m \text{ und}$$

$$\mathcal{V}^b = d(S^{ab})(S^{ab})^{-1} + S^{ab} \mathcal{V}^a (S^{ab})^{-1}$$

2.3 Lemma:

Sei M eine m -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit $m \geq 2$. Weiter seien $\mathfrak{U} = (U_a)_{a \in A}$ eine offene Überdeckung von M sowie auf jeder Überdeckungsmenge U_a meromorphe Differentialformen

$\omega_1^a, \dots, \omega_m^a, \gamma^a \in \mathfrak{M}^1(U_a)$ gegeben mit

$\omega_1^a \wedge \dots \wedge \omega_m^a \neq 0$ und $d\omega_1^a = \omega_1^a \wedge \gamma^a$ für $i = 1, \dots, m$.

Ausserdem gelte auf (jeder Zusammenhangskomponente von)

$U_{ab} := U_a \cap U_b$ mit $a, b \in A$ (falls $U_{ab} \neq \emptyset$):

es gibt $0 \neq h^{ab} \in \mathfrak{M}^0(U_{ab})$ mit

$\omega_i^b = h^{ab} \omega_i^a$ auf U_{ab} für $i = 1, \dots, m$.

Dann gilt:

a) Es gibt einen meromorphen projektiven Zusammenhang

$\Delta = (U_a, \vartheta_a)_{a \in A}$ auf M .

b) Es gibt einen "speziellen" meromorphen projektiven Zusammenhang

$\hat{\Delta} = (U_a, \hat{\vartheta}_a)_{a \in A}$ auf M , so dass gilt:

$\hat{\vartheta}_{10}^a \wedge \dots \wedge \hat{\vartheta}_{m0}^a \neq 0$ und $\hat{\vartheta}_{00}^a + \hat{\vartheta}_{11}^a + \dots + \hat{\vartheta}_{mm}^a = 0$

Beweis:

a) Setze $\vartheta_{00}^a := \gamma^a$, $\vartheta_{0j}^a := \omega_j^a$ für $j = 1, \dots, m$ und $\vartheta_{ij}^a := 0$ sonst
 $s_{00}^{ab} := h^{ab}$, $s_{jj}^{ab} := 1$, für $j = 1, \dots, m$, $s_{ij}^{ab} = 0$ sonst

so erfüllen $\vartheta_a = (\vartheta_{ij}^a)$ und $s^{ab} = (s_{ij}^{ab})$ die Anforderungen.

b) Setze $\hat{\vartheta}_{00}^a := \frac{m}{m+1} \gamma^a$, $\hat{\vartheta}_{jj}^a := \frac{-1}{m+1} \gamma^a$ für $j = 1, \dots, m$

$\hat{\vartheta}_{0i}^a := \omega_i^a$ für $i = 1, \dots, m$ und $\hat{\vartheta}_{ij}^a := 0$ sonst.

$\hat{s}_{00}^{ab} := (h^{ab})^{-m}$, $\hat{s}_{jj}^{ab} := h^{ab}$ für $j = 1, \dots, m$

$\hat{s}_{ij}^{ab} := 0$ sonst

Dann erfüllen $\hat{\vartheta}_a := (\hat{\vartheta}_{ij}^a)$ und $\hat{s}^{ab} := (\hat{s}_{ij}^{ab})$

die Behauptung b).

2.4 Folgerung: [14]

Sei M komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim M =: m \geq 2$.

Dann induziert jedes meromorphe Gewebe W auf M (in der eben beschriebenen Weise) meromorphe projektive Zusammenhänge Δ_W und $\hat{\Delta}_W$ auf M .

Diese Zusammenhänge sind nicht eindeutig, man kann sie durch $(m-1)m/2$ Funktionen noch abändern, vgl. [14], S. 266.

Bei Äquivalenzproblemen müsste dies berücksichtigt werden.

2.5 Bemerkung

Seien M, N komplexe Mannigfaltigkeiten mit $\dim M = \dim N = m \geq 2$.

$W = (V_a, W_a)_{a \in A}$, $W_a = (V_a, \omega_0^a, \dots, \omega_m^a, \gamma^a)$ bzw. $(V_a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a)$

ein meromorphes Gewebe auf N und $f: M \longrightarrow N$ eine holomorphe Abbildung, deren Funktionaldeterminante (in den lokalen Koordinaten) nicht identisch verschwindet.

Dann induziert f wegen des Pull-back Lemmas 0.3 ein meromorphes Gewebe W_f auf M , das folgendermassen definiert ist:

$$W_f := (f^{-1}(V_a), W_a^f)_{a \in A} \text{ mit } W_a^f := (f^{-1}(V_a), f^*(\omega_0^a), \dots, f^*(\gamma^a)) \\ (= f^*(W)) \quad \text{bzw. } (f^{-1}(V_a), f^*(\omega_1^a), f^*(\omega_2^a), f^*(\omega_3^a), f^*(\gamma^a))$$

Nun zum allgemeinen (dh. von der Wahl eines speziellen Atlas unabhängigen) Begriff des meromorphen $(m+1)$ -Gewebes:

2.6 Definition

Sei M komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim M =: m > 2$.

a) Zwei meromorphe Gewebeatlanten $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und $W' = (U_b, W_b)_{b \in B}$ auf M heissen ähnlich, falls mit $C := A \cup B$ gilt:

$W'' := (U_c, W_c)_{c \in C}$ ist meromorpher Gewebeatlas auf M .

b) Ein (allgemeines) meromorphes $(m+1)$ -Gewebe auf M ist ein maximaler Gewebeatlas auf M .

Dh. die Zusammenfassung von zueinander ähnlichen Geweben auf M . Offenbar bestimmt jeder meromorphe Gewebeatlas ein $(m+1)$ -Gewebe in diesem Sinne. Damit ist auch unsere bislang missbräuchliche Sprechweise "meromorphes $(m+1)$ -Gewebe" gerechtfertigt.

c) Es seien M, N m -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten mit meromorphen Gewebe(atlanten) W auf M bzw. W auf N .

Eine holomorphe Abbildung $f: M \longrightarrow N$ mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante (i. lokalen Koord.)

werde gewebetreue Abbildung (zwischen den Geweben W und $\tilde{W}$) genannt (in Zeichen $f: W \longrightarrow \tilde{W}$), falls gilt:

$$\tilde{W}_f \in [W] \quad (\text{dh. } W \text{ und } \tilde{W}_f \text{ sind \u00e4hnliche Gewebe auf } M)$$

Bemerkungen zu obiger Definition:

F\u00fcr die \u00c4hnlichkeit von meromorphen Geweben $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und $W' = (U_b, W_b)_{b \in B}$ muss gem\u00e4ss Definition 2.1 nur die Vertr\u00e4glichkeitsbedingung 2.1 c) nachgepr\u00fcft werden. Hierf\u00fcr gen\u00fcgt es, wenn man zeigen kann, dass

$$\omega_1^b \wedge \omega_1^a = 0 \quad \text{auf } V_{ab} := U_a \cap U_b \neq \emptyset \quad \text{f\u00fcr } a \in A, b \in B$$

und alle $i = 0, \dots, m$ bzw. $i = 1, 2, 3$.

(Denn dann kann man wegen Lemma 0.9 auf die Existenz von meromorphen Funktionen $h^{ab} \neq 0$ auf V_{ab} schliessen, die 2.1 c) erf\u00fcllen).

Offensichtlich definiert der Begriff " \u00e4hnlich " eine \u00c4quivalenzrelation auf der Klasse aller meromorphen Gewebe von M , (man hat $h^{ad} := h^{ab} h^{bd}$ auf $U_a \cap U_b \cap U_d \neq \emptyset$ zu nehmen). Wenn man die offene \u00dcberdeckung von W zu einer Karten\u00fcberdeckung von M verfeinert und die lokalen Gewebe entsprechend einschr\u00e4nkt, erh\u00e4lt man ein zu W \u00e4hnliches Gewebe W^* auf M . W^* besteht dann also (wegen 2.5 modulo Kartenabbildungen) aus einer Familie von meromorphen Geweben auf Gebieten in $\mathbb{C}^m$ im Sinne von §1 und man kann also die zugeh\u00f6rigen Halbinvariantensysteme betrachten.

Man kann sehr leicht zeigen, wenn f\u00fcr eine solche Gewebekarte K (bzw. ein T_{ij} oder K_{ij}) identisch verschwindet, dies auch f\u00fcr alle anderen gilt. (Zusammenhang von M , Identit\u00e4tssatz, $0 \neq h^{ab}$). Dies f\u00fchrt zu folgender Definition:

2.7 Definition

Sei M komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim M =: m \geq 2$.

a) $m = 2$:

Ein meromorphes Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf M werde lineares Gewebe genannt, wenn es ein $a \in A$ gibt, so dass:

$$d\gamma^a = 0 \quad \text{auf } U_a.$$

b) $m > 2$:

Ein meromorphes Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf M heisst linear, falls:

$$T_{ij}^a = 0 \quad \text{und} \quad K_{ij}^a = 0 \quad \text{f\u00fcr alle m\u00f6glichen } i, j \text{ und irgendein } a \in A.$$

Betrachtet man die Familie $(\tilde{w}_a)_{a \in A}$ von lokalen Kartengeweben auf Gebieten in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$, (die man durch eventuelle geeignete Verfeinerung der vorgegebenen Überdeckung erhalten kann), so folgt aus §1 die Existenz einer Familie von lokalen Halbinvariantensystemen $(\tilde{\varphi}_a)_{a \in A}$ bzw. $(\tilde{\varphi}_a^*)_{a \in A}$. Nach dem Pull-back Lemma 0.3 ist offenbar die Existenz der lokalen Halbinvariantensysteme $(\tilde{\varphi}_a)_{a \in A}$ bzw. $(\tilde{\varphi}_a^*)_{a \in A}$ von meromorphen Funktionen auf den Überdeckungsmengen $U_a, a \in A$ mit den (zu 1.4 bzw. 1.6) analogen Gleichungen gewährleistet; die b) -Eigenschaft entspricht der Verträglichkeitsbedingung 2.1 c) bzw. den ähnlichen Geweben.

Es soll nun gezeigt werden, dass die lokalen (Halb-) Invarianten (von Gewicht 0) globale meromorphe Invarianten definieren. Es wird von nun an immer angenommen werden, (ohne dass dies erwähnt wird), dass die zugrunde gelegten Überdeckungen bereits Kartenüberdeckungen ihrer Mannigfaltigkeiten sind, und somit die lokalen Halbinvariantensysteme wohldefiniert sind.

2.8 Lemma

Sei $W = (U_a, w_a)_{a \in A}$ ein meromorphes nichtlineares Gewebe auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M . Es gebe ein $a_0 \in A$ und eine lokale Invariante $I_{a_0} \in \mathbb{R}^0(U_{a_0})$

$I_{a_0} = N_{a_0}^{-1} L_{a_0}^{-n}$ mit lokalen Halbinvarianten $0 \neq L_{a_0}, N_{a_0} \in \mathbb{R}^0(U_{a_0})$ von Gewicht 1 bzw. n.

Dann gibt es genau eine meromorphe Invariante $I \in \mathbb{R}^0(M)$, so dass

$$I_{a_0} = I|_{U_{a_0}}.$$

Beweis: Es wird zunächst gezeigt, dass $N_a \neq 0$ für alle $a \in A$, und I lokal als I_a definiert ist.

Sei $b \in A$ beliebig, aber fest. Da M zusammenhängend ist, gibt es einen stetigen Weg $w: [0, 1] \longrightarrow M$ mit $w(0) \in U_{a_0}$ und $w(1) \in U_b$.

Wegen der Kompaktheit von $w([0, 1]) \subset M$ gibt es offene (zusammenhängende) Mengen $U_{a_1}, \dots, U_{a_n}$ mit $a_1, \dots, a_n \in A$ und

$$U_{a_1} \cap U_{a_{i+1}} \cap w([0, 1]) \neq \emptyset \quad \text{für } i = 0, \dots, n \text{ mit } a_{n+1} := b$$

Wegen 2.1 c) gibt es nicht identisch verschwindende Funktionen h^i auf (der Zusammenhangskomponente von) $U_{a_1} \cap U_{a_{i+1}}$ (die w trifft)

für $i = 0, \dots, n$ mit

$$L_{a_{i+1}} = (h^1)^1 L_{a_i} \quad (\text{und natürlich auch } N_{a_{i+1}} = (h^1)^n N_{a_i})$$

Durch Induktion nach i folgt aus $h^1 \neq 0$ und $L_{a_0} \neq 0$ offenbar

$$L_b \neq 0 \quad (\text{mithilfe des Identitätssatzes für meromorphe Funktion.})$$

Also ist für jedes $a \in A$ immer die lokale Invariante I_a wohldefiniert. Um nachzuprüfen, ob dadurch eine globale meromorphe Funktion definiert werden kann, betrachte man I_a und I_b auf $U_a \cap U_b$. Sei also $V_{ab} := U_a \cap U_b \neq \emptyset$ für $a, b \in A$.

Nach 2.1 c) gibt es auf (jeder Zusammenhangskomponente von) V_{ab} ein meromorphes $h^{ab} \neq 0$ mit

$$L_b = (h^{ab})^1 L_a \quad \text{und} \quad N_b = (h^{ab})^n N_a. \quad \text{Damit folgt:}$$

$$I_b = N_b^{-1} L_b^{-n} = (h^{ab})^{-n1} N_a^{-1} (h^{ab})^{-1n} L_a^{-n} = N_a^{-1} L_a^{-n} = I_a$$

auf (jeder Zusammenhangskomponente von) V_{ab} .

Folglich ist $I(p) := I_a(p)$ für $p \in U_a$ immer wohldefiniert.

2.9 Folgerung

Es seien $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und $W_N = (U_b, W_b)_{b \in B}$ meromorphe Gewebe auf den m -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten M und N mit $m \geq 2$, sowie $f : W_M \longrightarrow W_N$ gewebetreue Abbildung.

Dann gilt:

a) Ist eines der Gewebe (nicht) linear, so auch das andere.

b) Ist I_M eine wohldefinierte Invariante von W_M , so gibt es eine wohldefinierte analoge Invariante I_N von W_N und es gilt:

$$I_M = I_N \circ f \quad \text{auf } M.$$

c) Ist I_N eine wohldefinierte Invariante von W_N , so gibt es eine wohldefinierte analoge Invariante I_M von W_M und es gilt:

$$I_M = I_N \circ f \quad \text{auf } M.$$

Beweis: Sei $a \in A$ beliebig, aber fest. Dann gibt es sicher ein $b \in B$,

so dass $V_{ab} := U_a \cap f^{-1}(U_b) \neq \emptyset$. Für die auf V_{ab} induzierten

Gewebe W_a / V_{ab} und $f(W_b) / V_{ab}$ ist Lemma 2.8 anwendbar und

liefert offenbar die Existenz von I_N bzw. I_M vermöge des Pullback Lemmas 0.3 mit der behaupteten Eigenschaft (Identitätssatz!). Ebenso folgt die (Nicht-) Existenz lokaler nicht identisch verschwindender Halbinvarianten von Gewicht 1 bzw. 2.

2.10 Satz (Notwendige Bedingungen für die Existenz gewebetreuer Abbildungen zwischen Geweben auf Mannigfaltigkeiten)

Seien $W_M = (U_a, w_a)_{a \in A}$ und $W_N = (U_b, w_b)_{b \in B}$ meromorphe Gewebe auf m -dimensionalen komplexen offenen Mannigfaltigkeiten M, N mit $m \geq 2$, sowie $f : W_M \longrightarrow W_N$ eine gewebetreue Abbildung.

Dann gilt:

- a) Beide Gewebe W_M, W_N sind linear oder beide sind nichtlinear.
- b) Ist I_M eine wohldefinierte Invariante von W_M (im Sinne von 2.8), so ist auch die analoge Invariante I_N von W_N wohldefiniert und es gilt : $I_M = I_N \circ f$ auf M .
- c) Ist I_N eine wohldefinierte Invariante von W_N auf N , so ist auch die analoge Invariante I_M von W_M wohldefiniert und es gilt: $I_M = I_N \circ f$ auf M .
- d) W_M und W_N besitzen analog definierte globale Invariantensysteme (von meromorphen Funktionen auf M bzw. N).
- e) Seien I_M und I_N (einander zugeordnete) Invarianten von W_M und W_N . Dann gilt:

$$i) I_M(M) \subset I_N(N) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C})$$

ii) Falls $I_N(N)$ beschränkt ist, so ist auch $I_M(M)$ beschränkt.

iii) Sei $f : M \longrightarrow N$ surjektiv, dann gilt zusätzlich:

$$I_M(M) = I_N(N) \subset \mathbb{P}$$

(Eine funktionentheoretisch mehr befriedigende Aussage, die über den mengentheoretischen Sachverhalt hinausgeht, wäre mit den Begriffen "analytische Projektion" (vgl. z.B. [13]) bzw. "komplexe Basis" der Abbildungen I_N, I_M (vgl. z.B. [20], [21]) möglich, doch kann hier nicht darauf eingegangen werden; zudem reichen für die späteren Anwendungen die obigen Aussagen aus).

Schlussfolgerung für konkrete Anwendungen:

Es seien $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und $W_N = (U_b, W_b)_{b \in B}$ vorgelegte meromorphe Gewebe auf m -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten M und N mit $m \geq 2$. Dann gibt es sicher keine gewebetreue Abbildung zwischen W_M und W_N , falls gilt:

- Genau eines der Gewebe W_M, W_N ist (nicht) linear.
- Zu einer wohldefinierten globalen meromorphen Invariantenfunktion I_M (bzw. I_N auf N) auf M gibt es keine wohldefinierte analoge Invariante I_N (bzw. I_M auf M) auf N .
- Seien I_M und I_N wohldefinierte analoge Invarianten, so dass die Mengen $I_M(M)$ und $I_N(N)$ mengentheoretisch unterschiedlich sind (nicht in einander enthalten, unbeschränkt-beschränkt). Insbesondere gibt es keine surjektive gewebetreue Abbildung falls sie von einander echt verschieden sind.

Für konkrete Berechnungen wird man versuchen mit den niedrigsten Halbinvarianten aus zukommen, dh. z.B. im 2-dimensionalen Fall mit $K, K_1, K_2, K_{11}, K_{12}, K_{22}, K_{111}, K_{112}, K_{121}, K_{122}, K_{221}, K_{222}$ (vgl. 1.9-10). Das nächste Kapitel wird sich damit beschäftigen, ob es lokal hinreichende Bedingungen für Konstruktionen lokaler gewebetreuer Abbildungen zwischen Geweben (hauptsächlich im 2-dimensionalen Fall) gibt und welche lokalen Halbinvarianten (gibt es z.B. eine obere Begrenzung der Anzahl, oder des Gewichts der zu betrachtenden Halbinvarianten für lokal hinreichende Information?) man höchstens auszurechnen braucht.

Kapitel II. Lokale Bedingungen für gewebetreue Abbildungen

§1 Lineare Gewebe auf komplexen Mannigfaltigkeiten

Für lineare meromorphe Gewebe kann man keine Invariantenfunktionen wie im vorhergehenden Paragraphen definieren; um dennoch zu ebenso nützlichen Ersatzfunktionen zu kommen, geht man von der besonderen Gestalt der Strukturgleichungen aus:

Für ein lineares meromorphes Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ mit den lokalen Geweben $W_a = (U_a, \omega_a^0, \dots, \omega_m^a, \gamma^a)$ auf einer m -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit M mit $m \geq 2$ gilt:

$$d\omega_1^a = \omega_1^a \wedge \gamma^a \quad \text{für } i = 0, \dots, m$$

$$d\gamma^a = 0$$

(In diesem Paragraphen soll der Fall $m = 2$ nicht gesondert notiert werden.)

Durch Anwenden des Lemmas von Poincaré 0.4 kann man unter gewissen Voraussetzungen auf die Existenz lokaler "Linearisierungen" von W schließen, die die Rolle von Invarianten übernehmen.

1.1 Lemma: (Existenz holomorpher Linearisierungen, vgl. [9], p. 44-5)

Sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ lineares holomorphes Gewebe auf der m -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit M mit $m \geq 2$: für alle lokalen Gewebe $W_a = (U_a, \omega_a^0, \dots, \omega_m^a, \gamma^a)$ gelte:

$$\omega_a^0, \dots, \omega_m^a, \gamma^a \in \Omega^1(U_a)$$

Dann gibt es eine "holomorphe Linearisierung" : (vgl. 1.2)

$L = (V_b, L_b^0, \dots, L_m^b)_{b \in B}$ des linearen Gewebes W , bestehend aus einer offenen Verfeinerung $(V_b)_{b \in B}$ von $(U_a)_{a \in A}$ von M sowie holomorphen Funktionen $L_b^0, \dots, L_m^b \in \Omega^0(V_b)$, so dass gilt:

$$L_b^0 + \dots + L_m^b = 0 \quad \text{auf } V_b \quad \text{für jedes } b \in B$$

Die Gewebe W und $W_L := (V_b, W_b := (V_b, dL_b^0, \dots, dL_m^b, \gamma^b = 0))_{b \in B}$ sind ähnlich (im Sinne der Definition 2.6 b)).

(Das letztere bedeutet konkret, da $(V_b)_{b \in B}$ Verfeinerung von

$$(U_a)_{a \in A} \text{ ist: Für } V_b \subset U_a \text{ gilt: } dL_1^b \wedge \omega_{1/V_b}^a = 0$$

$$\text{für } i = 0, \dots, m).$$

Beweis: Sei x ein beliebiger, fest gewählter Punkt aus M .

Dann gibt es ein $a \in A$ mit $x \in U_a$.

Für das Gewebe $W_a = (U_a, \omega_0^a, \dots, \omega_m^a, \gamma^a)$ folgt:

Wegen dem Poincaré Lemma 0.3 und der Voraussetzung $d\gamma^a = 0$

gibt eine offene Umgebung $U_x \subset U_a$ von x und ein $F_x \in \Omega^0(U_x)$,

so dass gilt: $dF_x = \gamma^a$ auf U_x

Mit $h_x := \exp(F_x) \in \Omega^0(U_x)$ folgt:

$d(h_x \omega_1^a) = d h_x \wedge \omega_1^a + h_x \omega_1^a \wedge \gamma^a = 0$ auf U_x für $i = 0, \dots, m$.

Da $h_x \omega_{i/U_x}^a \in \Omega^1(U_x)$ für $i = 0, \dots, m$ kann man das Poincaré-

Lemma 0.3 nochmals anwenden:

Es gibt eine offene Umgebung $V_x \subset U_x$ von x , holomorphe Funktionen

$u_1^x \in \Omega^0(V_x)$ für $i = 0, \dots, m$ mit

$du_1^x = h_x \omega_1^a$ für $i = 0, \dots, m$ auf $V_x \subset U_a$. ($\rightarrow u_1^x$ nichtkonstant!)

Wegen 1.1 c) muss gelten:

$h_x \omega_0^a + \dots + h_x \omega_m^a = 0$ auf $V_x \subset U_a$. Hieraus folgt:

$u_0^x + \dots + u_m^x = C \in \mathbb{C}$. Sei $L_1^x := u_1^x - \frac{C}{m+1} \in \Omega^0(V_x)$, dann gilt:

$dL_1^x \wedge \omega_1^a = 0$ auf $V_x \subset U_a$ für $i = 0, \dots, m$ sowie

$L_0^x + \dots + L_m^x = 0$ auf $V_x \subset U_a$.

Da x beliebig aus M gewählt war, erhält man für $B := M$ (als Menge)

die gesuchte Linearisierung $L = (V_b, L_0^b, \dots, L_m^b)_{b \in B}$.

$(V_b)_{b \in B}$ ist offensichtlich eine Verfeinerung von $(U_a)_{a \in A}$.

1.2 Definition (Linearisierung eines linearen Gewebes)

Sei $W = (U_a, \omega_a)_{a \in A}$ lineares meromorphes Gewebe auf der m -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit M mit $m \geq 2$.

$L = (V_b, L_0^b, \dots, L_m^b)_{b \in B}$ wird Linearisierung von W genannt, falls

a) $(V_b)_{b \in B}$ eine offene Überdeckung von M ist

b) $L_0^b, \dots, L_m^b \in \mathbb{R}^0(V_b)$ für jedes $b \in B$ und

$L_0^b + \dots + L_m^b = 0$ auf V_b für jedes $b \in B$.

c) W und $W_L := (V_b, \omega_b := (V_b, dL_0^b, \dots, dL_m^b, \gamma^b := 0))_{b \in B}$

ähnliche Gewebe (im Sinne von Definition 2.6 b)) auf M sind.

1.3 Lemma: (Eindeutigkeit der Linearisierung) [16], S.186-7

Sei M komplexe m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $m \geq 2$. Weiter sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ lineares Gewebe auf M mit zwei

verschiedenen Linearisierungen $L = (U_a, L_O^a, \dots, L_m^a)_{a \in A}$ und $\bar{L} = (U_a, \bar{L}_O^a, \dots, \bar{L}_m^a)_{a \in A}$ (bzgl. der gleichen Überdeckung (U_a)).

Dann gibt es zu jedem $a \in A$ ein $(A^a, B_1^a, \dots, B_m^a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ mit

$$\bar{L}_O^a = A^a L_O^a - B_1^a - \dots - B_m^a$$

$$\bar{L}_1^a = A^a L_1^a + B_1^a \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Beweis: Sei $a \in A$ beliebig, aber fest gewählt.

Aus der Ähnlichkeit der Gewebe W, W_L und $W_{\bar{L}}$ folgt, die meromorphen nichtkonstanten Linearisierungsfunktionen

L_1^a und $\bar{L}_1^a$ sind auf U_a analytisch abhängig, für $i = 0, \dots, m$

Nach 0.8 gibt es eine offene zusammenhängende Menge $U \subset U_a$,

sowie holomorphe Funktionen $F_i \in Q^0(L_1^a(U))$, $i = 0, \dots, m$ mit

$$\bar{L}_1^a = F_1 \circ L_1^a \quad \text{auf } U \text{ für } i = 0, \dots, m$$

Aus den Gleichungen $L_O^a + \dots + L_m^a = 0$ und $\bar{L}_O^a + \dots + \bar{L}_m^a = 0$

folgt wegen der analytischen Abhängigkeit von L_O^a und $\bar{L}_O^a$:

$$0 = d L_O^a \wedge d L_O^a = d \left(\sum_{i=1}^m L_1^a \right) \wedge d \left(\sum_{j=1}^m \bar{L}_j^a \right) =$$

$$= \sum_{1 \neq j} d L_1^a \wedge d \bar{L}_j^a$$

$$= \sum_{1 < j} (d L_1^a \wedge d \bar{L}_j^a + d L_j^a \wedge d \bar{L}_1^a)$$

$$= \sum_{1 < j} (F_j'(\bar{L}_j^a) - F_1'(\bar{L}_1^a)) d L_1^a \wedge d \bar{L}_j^a \quad \text{auf } U \subset U_a$$

$$(\text{wobei } F_1' := \frac{d}{dz} F_1 \quad \text{und} \quad F_1'' := \frac{d^2}{dz^2} F_1, \quad i = 1, \dots, m \text{ sei}).$$

Es folgt (wegen $d L_1^a \wedge d L_j^a \neq 0$, vgl. I.1.1 b)) auf U :

$$F_1'(L_1^a) = \dots = F_m'(L_m^a) =: F \in Q^0(U). \text{ Erneutes Anwenden von } d:$$

$$F_1''(L_1^a) d L_1^a = \dots = F_m''(L_m^a) d L_m^a = d F$$

Aus der Unabhängigkeit der 1-Formen $d L_1^a, i = 1, \dots, m$ (vgl. I.1.1) folgt somit auf U :

$$F_1'' = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m, \text{ also ist } F_1' = F = A^a \in \mathbb{C}$$

$$\rightarrow F_1(z) = A^a z + B_1^a, \quad i = 1, \dots, m \text{ und offenbar die Behauptung.}$$

Analog wie bei den Invarianten stellt sich nun die Frage, gibt es globale Linearisierungsfunktionen?

1.4 Lemma:

Sei M komplexe m -dimensionale Mannigfaltigkeit mit $m \geq 2$.

Sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ lineares Gewebe auf M mit Linearisierung

$$L = (U_a, L_0^a, \dots, L_m^a)_{a \in A}.$$

Dann gibt es eine Familie $(q^{ab})_{a,b \in A}$ mit

$$q^{ab} = (A^{ab}, B_1^{ab}, \dots, B_m^{ab}) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m, \circ), \text{ dem semidirekten Produkt}$$

der abelschen Gruppen $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{C}^m, +)$, so dass gilt:

a) $L_1^b = A^{ab} L_1^a + B_1^{ab}$ für $i = 1, \dots, m$ und

$$L_0^b = A^{ab} L_0^a - B_1^{ab} - \dots - B_m^{ab} \quad \text{für } a, b \in A \text{ mit } U_a \cap U_b \neq \emptyset$$

b) $q^{ab} \circ q^{bc} = q^{ac}$ für $a, b, c \in A$ mit $U_a \cap U_b \cap U_c \neq \emptyset$

c) Es gibt genau dann globale meromorphe Linearisierungsfunktionen $L_0, \dots, L_m \in \mathcal{M}^0(M)$ (so dass $L := (M, L_0, \dots, L_m)$ Linearisierung von W auf M ist), falls gilt:

es gibt eine Familie $(q^a)_{a \in A}$ mit $q^a \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m, \circ)$ derart, dass

$$q^{ab} \circ q^b = q^a \quad \text{für } a, b \in A \text{ mit } U_a \cap U_b \neq \emptyset.$$

Die Funktionen $L_0, \dots, L_m \in \mathcal{M}^0(M)$ sind offensichtlich bis auf $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ eindeutig bestimmt (vgl. 1.3).

Beweis: Die Verknüpfung $\circ$ in $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m, \circ)$ ist durch

$$(A, B_1, \dots, B_m) \circ (\bar{A}, \bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m) := (A\bar{A}, A\bar{B}_1 + \bar{B}_1, \dots, A\bar{B}_m + \bar{B}_m)$$

definiert, (vgl. z.B. Huppert: Endliche Gruppen I, S.89). 2.3 liefert

sofort a) und b). Für $a, b \in A$ mit $U_a \cap U_b = \emptyset$ kann man

$$q^{ab} := (1, 0, \dots, 0) \text{ setzen.}$$

c) " $\Leftarrow$ ": Sei $q^a = (A^a, B_1^a, \dots, B_m^a)$ gemäss Voraussetzung. Dann ist ist $L_i, i = 1, \dots, m$ auf jedem U_a durch

$$L_i(p) := A^a L_i^a(p) + B_i^a \quad \text{für } p \in U_a \text{ definiert und wegen}$$

$$q^{ab} \circ q^b = q^a \text{ auch auf } M \text{ wohldefiniert, dh. } L_i \in \mathcal{M}^0(M), i = 1, \dots, m$$

Schliesslich $L_0 := -L_1 - \dots - L_m$ ist klar.

" $\Rightarrow$ ": Sei $L = (M, L_0, \dots, L_m)$ globale Linearisierung von W so folgt mit 1.3, Definition 1.2:

es gibt zu jedem $a \in A$ ein $q^a = (A^a, B_1^a, \dots, B_m^a) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ mit
 $L_1/U_a = A^a L_1^a + B_1^a$ auf U_a . Daraus folgt offenbar c).

1.5 Satz (Existenz globaler Linearisierungen)

Sei M komplexe m -dimensionale Mannigfaltigkeit, $m \geq 2$, deren erste Homologiegruppe $H_1(M)$ mit ganzzahligen Koeffizienten Null ist. Weiter sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ lineares meromorphes Gewebe auf M mit einer Linearisierung $L = (U_a, L_0^a, \dots, L_m^a)_{a \in A}$.

Dann gibt es eine globale Linearisierung $L = (M, L_0, \dots, L_m)$ auf M , d.h. es gibt meromorphe Funktionen

$L_0, \dots, L_m \in \mathbb{C}^0(M)$ mit $L_0 + \dots + L_m = 0$ auf M , so dass

die Gewebe W und $W_L := (M, W_M := (M, d L_0, \dots, d L_m, \gamma := 0))$

ähnliche Gewebe (im Sinne der Definition I.2.6) sind.

Beweis: Wegen der Isomorphie der singulären und der Čechschen Kohomologie ([22]: 6.9./5; 6.8.7/8) gilt für $\mathfrak{B} = (U_a)_{a \in A}$:

$$H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{C}^*) = 0 \quad \text{und} \quad H^1(\mathfrak{B}, \mathbb{C}) = 0,$$

d.h. alle Kozyklen bzgl. der offenen Überdeckung $\mathfrak{B}$ von M mit Werten in $\mathbb{C}^*$ und $\mathbb{C}$ zerfallen.

Sei $q^{ab} = (A^{ab}, B_0^{ab}, \dots, B_m^{ab}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ für $a, b \in A$ gemäß 1.4.

Wegen 1.4 b) gilt insbesondere

$$A^{ab} A^{bc} = A^{ac} \quad \text{für } a, b, c \in A \text{ mit } U_a \cap U_b \cap U_c \neq \emptyset$$

Somit ist $(A^{ab})_{a, b \in A}$ Kozykel bzgl. $\mathfrak{B}$ mit Werten in $\mathbb{C}^*$ und zerfällt:

Es gibt also eine Familie $(A^a)_{a \in A}$ mit $A^a \in \mathbb{C}^*$ derart, dass

$$A^{ab} A^b = A^a \quad \text{für } a, b \in A \text{ mit } U_a \cap U_b \neq \emptyset$$

Aus 1.4 b) folgt noch (für jedes $i = 1, \dots, m$):

$$A^{bc} B_1^{ab} + B_1^{bc} = B_1^{ac} \quad \text{für } a, b, c \in A \text{ mit } U_a \cap U_b \cap U_c \neq \emptyset$$

Setzt man das letzte Ergebnis ein, so folgt:

$b_1^{ab} := B_1^{ab} A^b$ definiert einen Kozykel $(b_1^{ab})_{a, b \in A}$ bzgl. $\mathfrak{B}$ mit

Werten in $\mathbb{C}$ (für jedes $i = 1, \dots, m$), der nach Voraussetzung zerfallen muss:

Es gibt eine Familie $(B_1^a)_{a \in A}$ mit $B_1^a \in \mathbb{C}$ (für jedes $i = 1, \dots, m$) derart, dass gilt:

$$B_1^a - B_1^b = b_1^{ab} = B_1^{ab} A_1^b \quad \text{für } a, b \in A \text{ mit } U_a \cap U_b \neq \emptyset$$

Es ergibt sich insgesamt für $a, b \in A$ mit $U_a \cap U_b \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} q^{ab} \circ q^b &= (A^{ab}, B_1^{ab}, \dots, B_m^{ab}) \circ (A^b, B_1^b, \dots, B_m^b) \\ &= (A^{ab} A^b, A^b B_1^{ab} + B_1^b, \dots, A^b B_m^{ab} + B_m^b) \\ &= (A^a, B_1^a - B_1^b + B_1^b, \dots, B_m^a - B_m^b + B_m^b) = q^a \end{aligned}$$

Nach 1.4 c) folgt damit die Existenz globaler Linearisierungsfunktionen $L = (M, L_0, \dots, L_m)$ von W auf M .

Es ist nach 1.3 klar, dass L nur bis auf Abänderung mit Elementen aus $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ eindeutig bestimmt ist.

Auch ist die Formulierung der Aussagen bzgl. einer festen offenen Überdeckung $(U_a)_{a \in A}$ wegen der Transitivität des Ähnlichkeitsbegriffes (vgl. I.2.6) gegenüber Verfeinerungen der Überdeckung von M wohlbegründet.

Man kann zu 1.5 analoge Aussagen auch durch Konstruktion von $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ -Bündeln F_W auf M mit lokalkonstanten Übergangsfunktionen (bzw. Prinzipalbündeln mit diskreter Strukturgruppe $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m, \circ)$ auf M) und Anwendung eines Klassifikationssatzes in Steenrod: Topology of Fibrebundles, Princeton N.J. 1951

(Theorem 13.9 p.66) erhalten. Denn die Trivialität von F_W liefert globale Linearisierungen von W .

Satz 1.5 liefert insbesondere die Existenz globaler Linearisierungsfunktionen auf einfach zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten, da der einfache Zusammenhang $H_1(M) = 0$ impliziert.

Im Folgenden wird gezeigt, dass sich die globalen Linearisierungsfunktionen $L_0, \dots, L_m$ gegenüber gewebetreuen Abbildungen f modulo $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ wie Invarianten verhalten. Dh. es gelten analoge Sachverhalte wie in I.2.10, die nur um die Ähnlichkeitskoeffizienten $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ modifiziert werden müssen:

$$\bar{L}_i \circ f = A L_i + B_i \quad i = 1, \dots, m$$

Die Bildmengen sind geometrisch ähnlich vermöge (A, B_1) .

(Dies ist auch eine späte Begründung des Begriffs "ähnliche Gewebe").

1.6 Satz (Notwendige Bedingungen für gewebetreue Abbildungen zwischen Geweben mit globalen Linearisierungen)

Seien $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und $W_N = (U_b, W_b)_{b \in B}$ lineare meromorphe Gewebe auf komplexen m -dimensionalen offenen Mannigfaltigkeiten M, N mit $m \geq 2$, sowie $f: W_M \longrightarrow W_N$ gewebetreue Abbildung. Es gebe globale Linearisierungen $L_M = (M, L_0, \dots, L_m)$ und $L_N = (N, \bar{L}_0, \dots, \bar{L}_m)$ von W_M und W_N .

Dann gilt:

a) Es gibt $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, so dass

$$\bar{L}_i \circ f = A L_i + B_i \quad \text{auf } M \text{ für } i = 0, \dots, m \text{ mit } B_0 := - \sum_{j=1}^m B_j$$

b) Für die Linearisierungsmengen $M_i := L_i(M)$, $N_i := \bar{L}_i(N)$ mit $i = 0, \dots, m$ gilt:

$M_i \subset N_i$ und " $=$ ", falls f surjektiv.

c) Mit den Ähnlichkeitstransformationen $f_i: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$
 $f_i(t) := A t + B_i$ für $i = 0, \dots, m$ kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ L_i \downarrow & \quad \quad \quad & \downarrow \bar{L}_i \\ M_i & \xrightarrow{f_i} & N_i \end{array} \quad \text{für alle } i = 0, \dots, m$$

und es gilt: $f_i(M_i) \subset N_i$ " $=$ " falls f surjektiv.

d) Ebenso folgt:

$$(\bar{L}_{i_1}, \dots, \bar{L}_{i_k}) \circ f = (f_{i_1}, \dots, f_{i_k}) \circ (L_{i_1}, \dots, L_{i_k}) \quad \text{auf } M$$

für alle $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, \dots, m\} \quad (0 \leq k \leq m)$

Beweis: Wegen des Pull-back Lemmas 0.3 induziert W_N vermöge f ein lineares Gewebe W_f auf M mit der globalen Linearisierung $L_f = (M, \bar{L}_0 \circ f, \dots, \bar{L}_m \circ f)$

Nach Lemma 1.3 gibt es $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, so dass a) erfüllt ist.

b) - d) sind offensichtliche Umformulierungen von a).

1.7 Satz (Umkehrung unter gewissen Voraussetzungen)

Seien $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und $W_N = ((U_b, W_b)_{b \in B}$ lineare meromorphe Gewebe auf komplexen m-dimensionalen offenen Mannigfaltigkeiten M, N mit $m \geq 2$.

Es gebe globale holomorphe Linearisierungen $(M, L_0, \dots, L_m)$ und $(N, \bar{L}_0, \dots, \bar{L}_m)$ von W_M und W_N , derart, dass gilt:

a) Es gibt $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, so dass

$$(f_1, \dots, f_m) : (L_1, \dots, L_m)(M) \longrightarrow (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m)(N) =: N_L$$

$$(t_1, \dots, t_m) \longmapsto (At_1 + B_1, \dots, At_m + B_m)$$

wohldefiniert (bzw. surjektiv) ist.

b) Für die folgenden Abbildungen gelte:

$$(L_1, \dots, L_m) : M \longrightarrow \mathbb{P}^m, x \longmapsto (L_1(x), \dots, L_m(x))$$

sei holomorphe Abbildung.

$$(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m) : N \longrightarrow N_L, y \longmapsto (\bar{L}_1(y), \dots, \bar{L}_m(y))$$

sei biholomorphe Abbildung.

Dann gibt es eine holomorphe (bzw. surjektive) gewebetreue Abbildung $f : W_M \longrightarrow W_N$ mit

$$\bar{L}_i \circ f = f_i \circ L_i \quad \text{auf } M \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Beweis: Aus b) folgt offensichtlich:

$$f := (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m)^{-1} \circ (f_1, \dots, f_m) \circ (L_1, \dots, L_m) : M \longrightarrow N$$

ist wohldefinierte holomorphe (bzw. surjektive) Abbildung.

$$\text{mit } \bar{L}_i \circ f = f_i \circ L_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

$$\text{Sei } f_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ durch } f_0(t) := At - B_1 - \dots - B_m$$

definiert, dann gilt wegen $L_0 + \dots + L_m = 0$ und

$$f_0 \circ L_0 + \dots + f_m \circ L_m = 0 :$$

$$d L_1 \wedge d(\bar{L}_1 \circ f) = d L_1 \wedge d(f_1 \circ L_1) = A d L_1 \wedge d L_1 = 0$$

auf M für $i = 1, \dots, m$ und

$$d L_0 \wedge d(L_0 \circ f) = d L_0 \wedge d(-\bar{L}_1 \circ f - \dots - \bar{L}_m \circ f)$$

$$= d L_0 \wedge d(-f_1 \circ L_1 - \dots - f_m \circ L_m) = d L_0 \wedge d(f_0 \circ L_0)$$

$$= 0. \text{ Es folgt, } f \text{ ist (surjektiv) gewebetreu.}$$

Es wird nun versucht, etwas für den Fall auszusagen, dass es keine globale (holomorphe) Linearisierungen zu einem vorgegebenen meromorphen linearen Gewebe gibt. Es gibt dann fast überall gewebetreue Abbildungskeime. Zunächst eine Definition:

1.8 Definition (Permutierte Gewebe)

Sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ ein lineares Gewebe auf einer m -dimensionalen komplexen offenen Mannigfaltigkeit M ($m \geq 2$) mit den lokalen Geweben $W_a = (U_a, \omega_0^a, \dots, \omega_m^a, \gamma^a)$ für $a \in A$.

Weiter sei $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+1}$ eine Permutation von $\{0, \dots, m\}$.

Das meromorphe Gewebe $W^\sigma := (U_a, W_a^\sigma)_{a \in A}$ mit den lokalen Geweben

$$W_a^\sigma := (U_a, \omega_{\sigma(0)}^a, \dots, \omega_{\sigma(m)}^a, \gamma^a) \quad \text{für } a \in A$$

werde (vermöge σ) permutiertes Gewebe W^σ (von W) genannt.

1.9 Satz (Existenz lokaler gewebetreuer Abbildungskeime von linearen meromorphen Geweben)

Seien $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und $W_N = (U_b, W_b)_{b \in B}$ lineare meromorphe Gewebe auf den komplexen m -dimensionalen offenen Mannigfaltigkeiten M, N mit $m \geq 2$.

Es gebe Linearisierungen $L_M^a = (U_a, L_0^a, \dots, L_m^a)_{a \in A}$ von W_M und $L_N^b = (U_b, L_0^b, \dots, L_m^b)_{b \in B}$ von W_N bzgl. den vorgegebenen offenen Überdeckungen $\mathfrak{A}_M = (U_a)_{a \in A}$ und $\mathfrak{A}_N = (U_b)_{b \in B}$ von M und N .

Dann gibt es analytische (dünne) Mengen $Z_M \subset M$ und $Z_N \subset N$ derart, dass gilt:

Zu jedem $x \in M - Z_M$ und $y \in N - Z_N$ und jeder Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+1}$ gibt es eine offene Umgebung U von x und eine komplex 1-parametrische Familie $(f_{x,y,\sigma}^t)_{t \in T}$ gewebetreuer Abbildungen

$$f_{x,y,\sigma}^t: W_{M/U} \longrightarrow W_N^\sigma \quad \text{mit} \quad f_{x,y,\sigma}^t(x) = y$$

$$\text{für alle } t \in T := \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| \leq 1\}$$

(Übrigens wäre es leicht möglich, U gleichzeitig für alle Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+1}$ der Zahlen $\{0, \dots, m\}$ zu wählen).

Beweis: I. Die analytische Menge Z_M (für Z_N analoge Argumentation!)

Sei $x \in M$, dann gibt es $A_x \subset A$, derart, dass

$x \in U_a$ genau dann, falls $a \in A_x$

Sei $Z_a \subset U_a$ die analytische Menge in U_a , die aus den Unbestimmtheitsstellen der meromorphen Funktionen $L_1^a, \dots, L_m^a$ auf U_a und den Nullstellen von $d L_1^a \wedge \dots \wedge d L_m^a$ besteht, (so dass die Abbildung $(L_1^a, \dots, L_m^a)/U_a - Z_a : U_a - Z_a \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^m$ lokal biholomorph ist).

Dann gilt für $a, b \in A$ mit $V_{ab} := U_a \cap U_b \neq \emptyset$ nach 1.3 :

es gibt $(A^{ab}, B_1^{ab}, \dots, B_m^{ab}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ mit

$L_i^b = A^{ab} L_i^a + B_i^{ab}$ auf U_{ab} für $i = 1, \dots, m$. Somit folgt:

$Z_a \cap U_{ab} = Z_b \cap U_{ab}$.

Sei nun definiert $\hat{Z}_x := \bigcap_{a \in A_x} Z_a$ und $Z := \bigcup_{x \in M} \hat{Z}_x$ ($=: Z_M^!$)

Abgeschlossenheit von Z :

Sei $y \in M$ mit $y \notin Z$, dann gibt es $a \in A_y$ mit $y \notin Z_a$. Aber dann gibt es offenes $V \subset U_a$ mit $y \in V$ und $\emptyset = Z_a \cap V \subset Z \cap V$.

Z ist lokal analytisches Nullstellengebilde:

Sei $x \in M$ beliebig, aber fest und $a \in A_x$ gewählt.

Dann gibt es offene Umgebung $V \subset U_a$ von x mit

$V \cap Z_a = \{f_1 = 0, \dots, f_k = 0\}$ mit $f_1, \dots, f_k \in \Omega^0(V)$.

Es gilt nun $Z \cap V = Z_a \cap V$.

" $\subset$ ": klar, da für alle $z \in V$ gilt: $a \in A_z$

" $\supset$ ": Sei $y \in Z_a \cap V$.

Dann gilt für alle $b \in A_y$ insbesondere $y \in U_a \cap U_b =: U_{ab} \neq \emptyset$

Also ist (wie oben gezeigt wurde): $U_{ab} \cap Z_b = U_{ab} \cap Z_a$ bzw.

$V \cap Z_a = V \cap Z_b$ für alle $b \in A_y$, somit ist $y \in Z_b$ für alle $b \in A_y$.

Also ist $y \in \hat{Z}_y$ und folglich gilt:

$y \in Z \cap V$. Dh. schliesslich, Z ist analytische Menge in M derart,

dass: $(L_1^a, \dots, L_m^a)/U_a - Z$ sind lokal biholomorphe Abbildungen nach $(\mathbb{C}^*)^m$, für jedes $a \in A$.

II. Konstruktion der Abbildungskeime $f_{x,y,\sigma}^t$

Sei $x \in M - Z_M$ und $y \in N - Z_N$ beliebig, aber fest gewählt.

Dann sind $P := (L_1^a(x), \dots, L_m^a(x)) \in \mathbb{C}^m$

$$Q^\sigma := (\bar{L}_{\sigma(1)}^b(y), \dots, \bar{L}_{\sigma(m)}^b(y)) \in \mathbb{C}^m$$

für geeignete $a \in A$ und $b \in B$ wohldefiniert, so dass sogar die Abbildungen $(L_1^a, \dots, L_m^a)/U$ und $(\bar{L}_{\sigma(1)}^b, \dots, \bar{L}_{\sigma(m)}^b)/V$ auf genügend kleinen offenen Umgebungen $U \subset U_a$ von x bzw. $V \subset U_b$ von y biholomorph aufs Bild sind; sie seien f_x bzw. g_y^σ genannt. Sei $K_r \subset f_x(U)$ eine offene Kugel (vom Radius r) um P in $\mathbb{C}^m$.

Dann gibt es $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, so dass

$A K_r + (B_1, \dots, B_m) \subset g_y^\sigma(V)$ offene Kugel um Q^σ (vom Radius $|Ar|$)

Die holomorphe Abbildung (mit $U_0 := f_x^{-1}(K_r)$)

$$f_{x,y,\sigma}^t := (g_y^\sigma)^{-1} \circ (t \cdot A \cdot f_x + (B_1, \dots, B_m)) : U_0 \longrightarrow N$$

ist für $t \in T := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$ immer biholomorph aufs Bild und liefert eine gewebetreue Abbildung gemäss der Behauptung:

$$f_{x,y,\sigma}^t : W_{M/U_0} \longrightarrow W_N^\sigma$$

(Man wende Satz 1.7 auf die Gewebe W_{M/U_0} und W_N^σ/V_t^σ mit ihren globalen holomorphen Linearisierungen $(U_0, L_1^a/U_0, \dots, L_m^a/U_0)$ und $(V_t, \bar{L}_{\sigma(1)}^b/V_t^\sigma, \dots, \bar{L}_{\sigma(m)}^b/V_t^\sigma)$ an,

wobei $V_t^\sigma := (g_y^\sigma)^{-1}(t \cdot A K_r + (B_1, \dots, B_m)) \subset V \subset N$).

1.10 Beispiele

a) Zunächst wollen wir einige Beispiele linearer Gewebe mit globalen Linearisierungen geben.

1) Affine Gewebe auf $\mathbb{C}^m, m \geq 2$.

Es seien $a_j^i \in \mathbb{C}; i, j = 1, \dots, m$ mit $\det((a_j^i)_{i,j=1, \dots, m}) \neq 0$ sowie beliebige feste $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{C}$ vorgegeben.

Dann definieren die Funktionen

$$f_j : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad (z_1, \dots, z_m) \longmapsto \sum_{i=1}^m a_j^i z_i + b_j$$

mit $j = 1, \dots, m$

zusammen mit der Funktion $f_0 := -f_1 - \dots - f_m : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$
ein lineares Gewebe

$$W(f_0, \dots, f_m) = (\mathbb{C}^m, df_0, \dots, df_m)$$

mit der globalen Linearisierung $(\mathbb{C}^m, f_0, \dots, f_m)$

2) Die holomorphen Funktionen

$z_1, \dots, z_m, A_1 z_1^{l_1} + \dots + A_m z_m^{l_m}$ mit $A_\mu \in \mathbb{C}^*$, $l_\mu \in \mathbb{N}$
definieren ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^m$. ($\mu = 1, \dots, m$)

Es besitzt die globale Linearisierung

$$(\mathbb{C}^m, -A_1 z_1^{l_1}, \dots, -A_m z_m^{l_m}, A_1 z_1^{l_1} + \dots + A_m z_m^{l_m})$$

3) Die holomorphen Funktionen

$$f_1(z, w) = z, f_2(z, w) = z + w, f_3(z, w) = 2zw + w^2$$

liefern ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$ mit der folgenden globalen Linearisierung:

$$(\mathbb{C}^2, z^2, -(z+w)^2, 2zw + w^2)$$

4) Die holomorphen Funktionen

$$f_1(z, w) = z + w, f_2(z, w) = z^2 + w^2, f_3(z, w) = zw$$

induzieren ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$, das die folgende globale Linearisierung besitzt:

$$(\mathbb{C}^2, -(z+w)^2, z^2 + w^2, -2zw)$$

5) Für jede komplexe Zahl $a \neq 2$ definieren

$$f_1(z, w) = z + w, f_2(z, w) = zw, f_3(z, w) = z^2 + w^2 + a zw$$

ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$ mit globaler Linearisierung:

$$(\mathbb{C}^2, -(z+w)^2, (2-a)zw, z^2 + w^2 + a zw)$$

6) Für $a \in \mathbb{C}^*$ und $k \in \mathbb{N}$ wird von den Funktionen

$$f_1(z, w) = z + w, f_2(z, w) = zw^k, f_3(z, w) = z + w + a zw^k$$

ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$ mit der globalen Linearisierung

$$(\mathbb{C}^2, -(z+w), -a zw^k, z + w + a zw^k) \text{ definiert.}$$

b) Nun werden wir noch einige Beispiele von linearen Geweben mit nichtglobalen Linearisierungen angeben, d.h. solche, die nur fast überall eine lokale Linearisierung besitzen.

Die Idee besteht darin, als Gewebefunktionen solche zu wählen, die nur lokal mit Hilfe geeigneter Zweige des Logarithmus linearisiert werden können.

1) Die holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}^m, m > 2$ (mit $z = (z_1, \dots, z_m)$)

$$f_1(z) = z_1, \dots, f_m(z) = z_m, f_0(z) = z_1 \cdot \dots \cdot z_m$$

definieren ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^m, m > 2$.

Ausserhalb der analytischen Menge

$$\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m: z_1 = 0, \dots, z_m = 0\}$$

gibt es zu jedem Punkt x eine einfachzusammenhängende Umgebung U_x von x , auf der man ein Zweig der Logarithmusfunktion wählen kann und damit folgende lokale Linearisierung des Gewebes hat:

$$(U_x, -\log z_1, \dots, -\log z_m, \log(z_1 \cdot \dots \cdot z_m))$$

2) In ähnlicher Weise definieren die Funktionen

$$f_1(z, w) = z, f_2(z, w) = w, f_3(z, w) = z + w + z w$$

ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$, so dass es stets ausserhalb von

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2: z = 1, w = 1\}$$

zu jedem Punkt x geeignete Umgebung U_x von x mit lokaler Linearisierung des betrachteten Gewebes

$$(U_x, -\log(z+1), -\log(w+1), \log(z+w+zw)) \quad \text{gibt.}$$

3) Ein weiteres ähnliches Beispiel liefern die Funktionen

$$f_1(z, w) = z, f_2(z, w) = w, f_3(z, w) = z + a z w^k$$

für feste $a \in \mathbb{C}^*$ und $k \in \mathbb{N}$.

Das dazugehörige Gewebe besitzt ausserhalb der analytischen Menge

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2: z = 0, 1 + a w^k = 0\}$$

zu jedem Punkt x eine geeignete Umgebung U_x von x und lokale Linearisierung

$$(U_x, -\log z, -\log(1 + a w^k), \log(z + a z w^k)).$$

4) Genauso liefern die Funktionen $z, z + w, z^2 + z w$ ein lineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$, das ausserhalb von $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2: z = 0, z + w = 0\}$ beim Punkt x lokale Linearisierung

$$(U_x, -\log z, -\log(z+w), \log(z^2 + z w)) \quad \text{zulässt.}$$

5) Nicht anders ist es beim linearen Gewebe, das die Funktionen $f_1(z, w) = z, f_2(z, w) = w, f_3(z, w) = z^3 + 2 z^2 w + z w^2$ liefern. Ausserhalb von $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2: z = 0, z + w = 0\}$ ist in einer

geeigneten Umgebung U_x eines Punktes x eine lokale Linearisierung $(U_x, -\log z, -2\log(z+w), \log(z^3 + 2 z^2 w + z w^2))$ möglich.

§2 Nichtlineare Gewebe auf 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten und ihre wesentlichen Invarianten

Nach I.1.8-9 und I.2.8-9 besitzt jedes nicht lineare meromorphe Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf einer komplexen 2-dimensionalen offenen Mannigfaltigkeit M mindestens eine nicht konstante meromorphe Invariantenfunktion I (konkret eine von $I_1 = K_1^2 K^{-3}$, $1 = 1, 2, 3$) auf M . In diesem Paragraphen wird untersucht, wieviele weitere wesentliche Invariantenfunktionen auf M von W existieren und welche Rolle sie für die Existenz von (evtl. nur lokalen) gewebetreuen Abbildungen in andere Gewebe spielen. (Vgl. [6] §20, S. 195)

2.1 Bemerkung

Sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ nicht lineares Gewebe auf einer komplexen 2-dimensionalen offenen Mannigfaltigkeit M .

$\mathbb{G}(W)$ sei die Menge aller meromorphen Invariantenfunktionen die man vermöge I.1.7 und I.2.8 auf M von W definieren kann.

Dann lässt sich jedes $J \in \mathbb{G}(W)$ lokal auf jedem U_a eindeutig als

$J|_{U_a} = H L^{-1}$ mit lokalen Halbinvarianten H, L mit gleichem Gewicht $c \in \mathbb{N}$ darstellen, so dass für $H, L \neq 0$ gilt:

$$H = \sum_{i=1}^h a_i K_{I_1 i_1}^a \cdots K_{I_1 i_{h(i)}}^a \quad \text{und} \quad L = \sum_{j=1}^l b_j K_{I_1 j_1}^a \cdots K_{I_1 j_{l(j)}}^a \quad \text{mit}$$

$$c = i_1 + \dots + i_{h(i)} + 2h(i) = j_1 + \dots + j_{l(j)} + 2l(j)$$

und $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \dots, h$ und $j = 1, \dots, l$, wobei

$$K_{I_1 i_s}^a, K_{I_1 j_r}^a \in \mathbb{G}_{W_a} \quad (\text{wie in I.1.4 definiert}), (i_s \text{ bzw. } j_r \text{ alle } i, j)$$

Es genügt meist, wenn man jene Invariantenfunktionen kennt, die sich lokal auf $U_a, a \in A$ durch

$$J|_{U_a} / U_a = J_{I_s}^a = (K_{I_s}^a)^2 (K^a)^{-s-2} \quad \text{mit } K_{I_s}^a \in \mathbb{G}_{W_a}$$

definieren lassen; ihre Gesamtheit werde mit $\mathbb{G}_0(W)$ bezeichnet.

2.2 Definition

Sei M komplexe 2-dimensionale offene Mannigfaltigkeit.

a) Ein nicht lineares meromorphes Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf M heiße vom Typ (I) , falls es eine nicht konstante meromorphe

Invariante $I \in \mathbb{G}(W)$ gibt, so dass

$$dI \wedge dJ = 0 \quad \text{für alle } J \in \mathbb{G}(W).$$

b) Ein nicht lineares meromorphes Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf M heiße vom Typ (II), falls es Invariantenfunktionen $I, J \in \mathcal{G}(W)$ auf M von W gibt, so dass:

$d I \wedge d J \neq 0$ auf M .

Offensichtlich zerfallen die meromorphen Gewebe auf M in die drei disjunkten Klassen der linearen Gewebe, der Gewebe vom Typ (I) und der Gewebe vom Typ (II).

Wegen 0.8 lässt sich lokal (bei genügender Verfeinerung) auf U_a sich jedes $K_{I_S}^a \in \mathfrak{G}_W^a$ (ausserhalb einer gewissen analytischen (dünnen) Menge, die von a und $K_{I_S}^a$ sowie von I bzw. (I, J) abhängt):

$$K_{I_S}^a{}^2 = (K^a)^{s+2} g_{I_S}^a(I) \quad \text{bei Geweben von Typ (I) bzw.}$$

$$= (K^a)^{s+2} g_{I_S}^a(I, J) \quad \text{bei Geweben von Typ (II)}$$

mit einer lokalen holomorphen Funktion $g_{I_S}^a$, schreiben.

Nach Bemerkung 2.1 genügt es somit, (I) bzw. (II) auf $\mathcal{G}_0(W)$ zu testen.

Konkret kommt offenbar für (I) als Invariante I nur $I_1 = K_1^2 K^{-3}$ infrage (modulo Übergang zu einem permutierten Gewebe W_τ ,

mit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, vgl. auch I.1.10 unten). Es gilt folgender Satz:

2.3 Satz (Kriterium für Typ (I))

Sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ meromorphes nicht lineares Gewebe auf einer komplexen 2-dimensionalen offenen Mannigfaltigkeit M .

$I_1 = K_1^2 K^{-3} \in \mathcal{G}_0(W)$ sei nichtkonstante Invariantenfunktion.

Dann ist das Gewebe genau dann vom Typ (I), falls gilt:

Die Invariantenfunktionen $I_2 = K_2^2 K^{-3}$, $I_{11} = K_{11} K^{-2}$ und $I_{12} = K_{12} K^{-2}$ sind alle jeweils von I_1 analytisch abhängig, dh.

$$d I_1 \wedge d I_2 = 0$$

$$d I_1 \wedge d I_{11} = 0$$

$$d I_1 \wedge d I_{12} = 0 \quad \text{auf } M.$$

(Die Bezeichnungen $K_1^2 K^{-3}$, $K_{11} K^{-2}$, etc. sind offenbar ein Missbrauch, da in der Regel keine globalen Funktionen K, K_1, K_{11} , etc. definiert werden können, doch ist meist klar, welche globalen Funktionen gemeint sind. Auch deutet diese Bezeichnungsweise an, welche lokalen Informationen eingehen).

Beweis: Wegen Bemerkung 2.1 und des Identitätssatzes für meromorphe Funktionen und Differentialformen genügt es, die Behauptung nur lokal auf offenen Mengen für $J \in \mathbb{G}_0(W)$ zu zeigen. Da die notwendige Richtung trivial ist, wird für ein beliebiges $a \in A$ mithilfe vollständiger Induktion (nach Gewicht s)

$d I_1 \wedge d(K_{I_s}^a)^2 (K^a)^{-s-2} = 0$ auf offener Menge $U_{I_s} \subset U_a$ gezeigt für alle $I_s \in \{1, 2\}^s, s = 1, 2, \dots$ (vgl. Bezeichnungen zu I.1.4)

$s = 1, 2$: Es ist zu zeigen $d I_1 \wedge d(K_{21}^a) (K^a)^{-2} = 0, i = 1, 2$ (sonstiges ist Voraussetzung!) (auf U_a)

O.B.d.A. sei $K_2^a \neq 0$ (sonst ist die Behauptung trivial!)

Nach Lemma 0.8 gibt es offenes $U_2 \subset U_a$, so dass auf U_2
 $(K_2^a)^2 (K^a)^{-3} = g_2(I_1)$ mit $g_2 \in \Omega^0(I_1(U_2))$ und $K_2^a \neq 0, K^a \neq 0$

Durch direktes Rechnen folgt aus den Gleichungen (auf U_2)

$$d((K_2^a)^2 (K^a)^{-3}) = g_2'(I_1) d I_1 \quad \text{und} \quad d K_2^a - 3 K_2^a \gamma^a = K_{22}^a \omega_1^a - K_{21}^a \omega_2^a$$

die folgende Identität auf U_2 : (für $i = 1, 2$)

$$2(K_{21}^a)(K^a)^{-2} = 3 K_2^a K_1^a (K^a)^{-3} + g_2'(I_1) K_1^a (K_2^a)^{-1} (2 K_{21}^a (K^a)^{-2} - 3 K_1^a K_1^a (K^a)^{-3})$$

Hieraus folgt wegen $d I_1 \wedge d(K_1^a K_2^a (K^a)^{-3}) = 0$ und

$d I_1 \wedge d(K_1^a (K_2^a)^{-1}) = 0$ die obige Behauptung (auf U_a , Id.Satz!)

$s \rightarrow s+1$: Z.z.: Aus $d I_1 \wedge d((K_{I_s}^a)^2 (K^a)^{-s-2}) = 0$ auf U_a folgt: $d I_1 \wedge d((K_{I_{s+1}}^a)^2 (K^a)^{-s-3}) = 0$ auf U_a . (I_s beliebig, fest)

O.B.d.A. sei $K_{I_s}^a \neq 0$ (sonst ist nichts zu zeigen).

Wieder nach Lemma 0.8 gibt es offenes $U_{I_s} \subset U_a$, so dass

$$(K_{I_s}^a)^2 (K^a)^{-s-2} = g_{I_s}(I_1) \quad \text{mit} \quad g_{I_s} \in \Omega^0(I_1(U_{I_s})) \quad \text{und}$$

$K_{I_s}^a \neq 0, K^a \neq 0$ auf U_{I_s} . Durch Ausrechnen folgt auf U_{I_s} aus

$$d((K_{I_s}^a)^2 (K^a)^{-s-2}) = g_{I_s}'(I_1) d I_1 \quad \text{und}$$

$$d K_{I_s}^a - (s+2) K_{I_s}^a \gamma^a = K_{I_s 2}^a \omega_1^a - K_{I_s 1}^a \omega_2^a \quad \text{die Identität}$$

$$2 K_{I_s 1}^a = (s+2) K_{I_s}^a K_1^a (K^a)^{-1} + g_{I_s}'(I_1) (K_{I_s}^a)^{-1} K_1^a (2 K_{11}^a K^a - 3 K_1^a K_1^a) (K^a)^{s-2}$$

für $i = 1, 2$. Durch Quadrieren dieser Identität und Multiplikation mit $(K^a)^{-s-3}$ folgt ähnlich wie eben die Behauptung.

2.3 Folgerung (Gewebe vom Typ (II))

Sei M komplexe 2-dimensionale offene Mannigfaltigkeit.

Ein nicht lineares meromorphes Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf M ist genau dann vom Typ (II), wenn zwei der meromorphen Invarianten

$$I_1 = K_1^2 K^{-3}, I_2 = K_2^2 K^{-3}, I_{11} = K_{11} K^{-2}, I_{12} = K_{12} K^{-2}, I_{22} = K_{22} K^{-2}$$

von W auf M analytisch unabhängig sind.

($I_{21} = K_{21} K^{-2}$ ist unerheblich, da nach I.1.8 $I_{12} - I_{21} = 2$ gilt).

Konkret bedeutet dies:

Ist I_1 nichtkonstante Invariante von W (durch Permutation immer erreichbar), so kann immer als zweite wesentliche Invariante von W eine der Invarianten I_2, I_{11}, I_{12} gewählt werden.

Die Eigenschaft Typ (I) bzw. Typ (II) eines Gewebes ist invariant gegenüber gewebetreuen Abbildungen.

2.4 Lemma:

Seien M, N komplexe 2-dimensionale offene Mannigfaltigkeiten und $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ bzw. $W_N = (U_b, W_b)_{b \in B}$ seien meromorphe Gewebe auf M bzw. N . Weiter sei $f: W_M \longrightarrow W_N$ gewebetreue Abbildung. Dann gilt:

W_M lineares Gewebe $\iff W_N$ lineares Gewebe

W_M vom Typ (I) $\iff W_N$ vom Typ (I)

W_M vom Typ (II) $\iff W_N$ vom Typ (II)

(Typ-Gleichheit ist notwendige Bedingung für die Existenz von gewebetreuen Abbildungen zwischen meromorphen Geweben)

Beweis: Für den linearen Fall vgl. I.2.9.

Nach den vorhergehenden Überlegungen genügt es, sich mit den meromorphen Invarianten-funktionen $I_1, I_2, I_{11}, I_{12} \in \mathcal{G}_0(W_M)$ auf M , bzw. $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_{11}, \bar{I}_{12} \in \mathcal{G}_0(W_N)$ auf N auseinander zu setzen:

Einerseits gilt (nach I.2.9) $I = \bar{I} \circ f$ für analoge $I \in \mathcal{G}(W_M)$, $\bar{I} \in \mathcal{G}(W_N)$, dh. insbes. $I_1 = \bar{I}_1 \circ f$ und $I_{11} = \bar{I}_{11} \circ f$ auf M für $i = 1, 2$

andererseits folgt nach Definition I.2.6 c) für gewebetreues f :

es gibt offene (zusammenhängende) Mengen $U \subset M$ und $V \subset N$ so, dass

$f|_U: U \longrightarrow V$ biholomorphe Abbildung ist.

Offensichtlich ist I_1 genau dann nichtkonstant, wenn $\bar{I}_1$ nichtkonstant ist.

Es genügt (wegen des Identitätssatzes für meromorphe Funktionen) zu zeigen:

$d I_1 \wedge d I_2 = 0$, $d I_1 \wedge d I_{11} = 0$, $d I_1 \wedge d I_{12} = 0$ auf U
genau dann, falls

$d \bar{I}_1 \wedge d \bar{I}_2 = 0$, $d \bar{I}_1 \wedge d \bar{I}_{11} = 0$, $d \bar{I}_1 \wedge d \bar{I}_{12} = 0$ auf V .

Nach dem Pull-Back Lemma 0.3 und wegen f gewebetreu folgt

$d I_1 \wedge d I_2 = d(\bar{I}_1 \circ f) \wedge d(\bar{I}_2 \circ f) = f^*(d \bar{I}_1 \wedge d \bar{I}_2)$ sowie

$d I_1 \wedge d I_{11} = d(\bar{I}_1 \circ f) \wedge d(\bar{I}_{11} \circ f) = f^*(d \bar{I}_1 \wedge d \bar{I}_{11})$ für $i = 1, 2$

auf U . Also folgt " $\Leftarrow$ ", die andere Richtung folgt, wenn man die gleichen Überlegungen mit $(f|_U)^{-1}: V \longrightarrow U$ anstellt. Damit folgt offenbar die Behauptung dieses Lemmas.

Offensichtlich war für die " $\Leftarrow$ "-Richtung die Beschränkung auf lokal biholomorphe Teile von M und N unnötig, es gilt:

Ist $f: W_M \longrightarrow W_N$ gewebetreu, sind $I, J \in \mathcal{G}(W_M)$ und $\bar{I}, \bar{J} \in \mathcal{G}(W_N)$ analog definierte Invarianten sowie $y = f(x)$ Bildpunkt von $x \in M$, so folgt immer:

Ist $(d \bar{I} \wedge d \bar{J})(y) = 0$, so ist $(d I \wedge d J)(x) = 0$.

Jedoch umgekehrt i.a. nicht, z.B. Verschwinden der Funktionaldeterminante von f (in lokalen Koordinaten) im Punkt $x \in M$!

Es hat sich herausgestellt, dass für (lokale) Konstruktion von gewebetreuen Abbildungen (bei nicht linearen Geweben) ausser den wesentlichen Invarianten I (bzw. (I, J)) noch genau die von ihnen abgeleiteten Invarianten $I_{11} I_1^{-2}$, $i=1, 2, 3$, soweit sie definierbar sind, (bzw. $[I_1: I_2: J_1: J_2]$, was noch zu präzisieren ist), einbezogen werden müssen.

Sie werden lokal auf U_a für $a \in A$ mithilfe der Halbinvarianten aus den folgenden Gleichungen definiert:

$d I|_{U_a} = I_2^a \omega_1^a - I_1^a \omega_2^a$ (bzw. $d J|_{U_a} = J_2^a \omega_1^a - J_1^a \omega_2^a$), etc.

da die I (bzw. (I, J)) lokale Invarianten von Gewicht 0 sind.

Da sie nach Voraussetzung nichtkonstante meromorphe Funktionen sind, müssen auch nicht identisch verschwindende Funktionen unter den I_1^a, I_2^a (und unter den J_1^a, J_2^a) $\in \mathcal{M}^0(U_a)$ zu finden sein.

Damit findet man die obigen (abgeleiteten) Invarianten.

Zunächst werden die notwendigen Bedingungen für gewebetreue Abbildungen dargestellt, anschließend soll gezeigt werden, dass dies auch hinreichen wird, um lokale gewebetreue Abbildungen zu konstruieren. Wir beginnen mit Geweben von Typ (I).

2.5 Satz (Notwendige Bedingungen für gewebetreue Abbildungen zwischen meromorphen Geweben von Typ (I))

Seien M, N komplexe 2-dimensionale offene Mannigfaltigkeiten mit meromorphen Geweben von Typ (I):

$$W_M = (U_a, W_a)_{a \in A} \text{ auf } M \text{ bzw. } W_N = (U_b, W_b)_{b \in B} \text{ auf } N.$$

$I = K_1^2 K^{-3} \in \mathcal{G}(W_M)$ bzw. $\bar{I} = \bar{K}_1^2 \bar{K}^{-3} \in \mathcal{G}(W_N)$ sollen ihre wesentlichen Invariantenfunktionen bezeichnen.

Es sei nun $f: W_M \longrightarrow W_N$ eine gewebetreue Abbildung. Dann gilt:

a) Für mindestens zwei Indizes $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

Die Funktionen $I_{11} I_1^{-2}$ und $I_{jj} I_j^{-2}$ (sowie $\bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2}, \bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2}$) sind wohldefinierte Invariantenfunktionen.

b) Es gibt analytische Mengen $Z_M \subset M, Z_N \subset N$ derart, dass

$I/M - Z_M, I_{11} I_1^{-2}/M - Z_M, I_{jj} I_j^{-2}/M - Z_M: M - Z_M \longrightarrow \mathbb{P}$
holomorphe Abbildungen definieren. Gleiches gilt auf $N - Z_N$.

c) Zu jedem $x \in M - Z_M$ mit $f(x) \in N - Z_N$ gibt es offene Umgebungen $U \subset M - Z_M$ von x bzw. $V = f(U) \subset N - Z_N$ von $f(x)$ sowie holomorphe Abbildungen $g_1, g_j: I(U) \longrightarrow \mathbb{P}$ mit:

$$I(U) = I(V) \subset \mathbb{P}$$

$$I_{11} I_1^{-2} = g_1 \circ I \text{ auf } U \text{ bzw. } \bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2} = g_1 \circ \bar{I} \text{ auf } V$$

$$I_{jj} I_j^{-2} = g_j \circ I \text{ auf } U \text{ bzw. } \bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2} = g_j \circ \bar{I} \text{ auf } V$$

(Dies bedeutet geometrisch, die Mengen

$$(I, I_{11} I_1^{-2}, I_{jj} I_j^{-2})(U), (\bar{I}, \bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2}, \bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2})(V) \subset (\mathbb{P})^3$$

sind als (lokale) Untermannigfaltigkeiten von $(\mathbb{P})^3$ identisch).

Beweis:

Für jedes $a \in A$ ist $I^a := I/U$ (lokale) Halbinvariante von Gewicht a des lokalen Gewebes $W_a = (U_a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a)$.

Nach I.1.4 bzw. 1.7 kann man weitere Halbinvarianten aus der

der folgenden Gleichung gewinnen:

$$d I^a = I_2^a \omega_1^a - I_1^a \omega_2^a = I_1^a \omega_3^a - I_3^a \omega_1^a$$

Dann sind die Funktionen $I_1^a, I_2^a, I_3^a \in \mathbb{R}^0(U_a)$ lokale Halbinvarianten von Gewicht 1. Da I nach Voraussetzung nicht identisch konstante meromorphe Funktion ist, können offenbar mindestens zwei dieser lokalen Halbinvariantenfunktionen nicht identisch verschwinden. Hieraus folgt, (wie in I. §2 erläutert wurde), dass $I_{11} I_1^{-2}, I_{jj} I_j^{-2}$ (und auch $\bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2}, \bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2}$) wohldefinierte globale Invariantenfunktionen auf M bzgl. W_M (bzw. auf N für W_N) sind und insbesondere gelten muss:

$$\bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2} \cdot f = I_{11} I_1^{-2} \quad ; \quad I_{jj} I_j^{-2} \cdot f = I_{jj} I_j^{-2} .$$

für mindestens zwei verschiedene $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Man wähle nun für Z_M diejenige analytische Menge, welche die Unbestimmtheitsstellen von $I, I_{11} I_1^{-2}, I_{jj} I_j^{-2}$, die Nullstellen und Unbestimmtheitsstellen der meromorphen Differentialformen $dI, d(I_{11} I_1^{-2}), d(I_{jj} I_j^{-2})$ sowie den Nullstellen der Funktionaldeterminante (in den lokalen Koordinaten) von f enthält.

Für Z_N nehme man die analytische Menge, die aus den Unbestimmtheitsstellen von $\bar{I}, \bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2}, \bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2}$ sowie den Nullstellen und Unbestimmtheitsstellen der meromorphen Differentialformen $d\bar{I}, d(\bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2}), d(\bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2})$ besteht.

Offenbar ist: $Z_M \supset f^{-1}(Z_N)$

Damit sind a) und b) klar.

Sei nun $x \in M - Z_M$ mit $f(x) \in N - Z_N$ vorgegeben.

Da nach Voraussetzung W_M und W_N Gewebe von Typ (I) sind, folgt:

I und $I_{11} I_1^{-2}$ sind analytisch abhängig.

Dasselbe gilt auch für I und $I_{jj} I_j^{-2}$, bzw. für $\bar{I}, \bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2}, \bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2}$.

Nach o.8 und nach Massgabe der analytischen Menge Z_M folgt:

es existieren eine offene Umgebung U von x in $M - Z_M$ und holomorphe Abbildungen $g_i, g_j: I(U) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, so dass

$$I_{11} I_1^{-2} / U = g_1 \circ I / U \quad \text{ sowie } \quad I_{jj} I_j^{-2} / U = g_j \circ I / U$$

Aus denselben Gründen gibt es eine offene Umgebung $V \subset N - Z_N$ von $f(x)$, sowie holomorphe Abbildungen $\bar{g}_1, \bar{g}_j: \bar{I}(V) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ mit

$$\bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2} / V = \bar{g}_1 \circ \bar{I} / V \quad \text{ sowie } \quad \bar{I}_{jj} \bar{I}_j^{-2} / V = \bar{g}_j \circ \bar{I} / V$$

Offensichtlich kann man U und V (mit eventueller Verkleinerung)

so wählen, dass noch gilt:

$$I(U) = \bar{I}(V) =: \tilde{U} \subset \mathbb{P}$$

An dieser Stelle wird $I = \bar{I} \circ f$ und die lokale Biholomorphie von f in x , (Z_M wurde u.a. gerade so gewählt!), ausgenützt.

Insbesondere sind dann $g_i, g_j, \bar{g}_i, \bar{g}_j: \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{P}$ holomorphe Abbildungen mit gleichen Definitionsbereich $\tilde{U} \subset \mathbb{P}$.

Aus der Invarianteneigenschaft der Funktionen $I_{ii}, I_{ii}^{-2}, \bar{I}_{ii}, \bar{I}_{ii}^{-2}$ folgt für jedes $z = I(y) = \bar{I}(f(y)) \in \tilde{U}$ mit $y \in U$:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= g_1(I(y)) = I_{11} I_1^{-2}(y) = \\ &= \bar{I}_{11} \bar{I}_1^{-2}(f(y)) = \\ &= \bar{g}_1(\bar{I}(f(y))) = \bar{g}_1(I(y)) = \\ &= \bar{g}_1(z) \end{aligned}$$

Also folgt: $g_1 = \bar{g}_1$

In analoger Weise erhält man auch $g_j = \bar{g}_j$. Damit ist Satz 2.5 klar.

2.6 Satz (Notwendige Bedingungen für gewebetreue Abbildungen zwischen meromorphen Geweben von Typ (II))

Seien M, N komplexe 2-dimensionale offene Mannigfaltigkeiten mit meromorphen Geweben von Typ (II):

$$W_M = (U_a, W_a)_{a \in A} \text{ auf } M \text{ sowie } W_N = (U_b, W_b)_{b \in B} \text{ auf } N.$$

Sei $f: W_M \longrightarrow W_N$ eine gewebetreue holomorphe Abbildung.

Weiter seien $I, J \in \mathcal{G}(W_M)$ sowie $\bar{I}, \bar{J} \in \mathcal{G}(W_N)$ die wesentlichen Invarianten von W_M bzw. W_N und es gelte:

$$\bar{I} \circ f = I \text{ sowie } \bar{J} \circ f = J \quad (\text{d.h. } I, J \text{ und } \bar{I}, \bar{J} \text{ seien analog gewählt}).$$

Dann gilt:

a) Es gibt analytische (dünne) Mengen $Z_M \subset M, Z_N \subset N$, so dass:

$$(I, J) / M - Z_M : M - Z_M \longrightarrow (\mathbb{P})^2$$

$$(\bar{I}, \bar{J}) / N - Z_N : N - Z_N \longrightarrow (\mathbb{P})^2$$

sind wohldefinierte holomorphe Abbildungen.

b) Es existieren holomorphe Abbildungen

$$[I_1; I_2; J_1; J_2] : M - Z_M \longrightarrow \mathbb{P}_3$$

$$[\bar{I}_1; \bar{I}_2; \bar{J}_1; \bar{J}_2] : N - Z_N \longrightarrow \mathbb{P}_3 \quad \text{derart, dass}$$

$$[\bar{I}_1; \bar{I}_2; \bar{J}_1; \bar{J}_2] \circ f = [I_1; I_2; J_1; J_2] \quad \text{auf } (M - Z_M) \cap f^{-1}(N - Z_N)$$

c) Zu jedem $x \in M - Z_M$ (mit $f(x) \in N - Z_N$) gibt es offene Umgebungen $U \subset M - Z_M$ von x und $V \subset N - Z_N$ von $f(x)$ mit

$$(I, J)(U) = (\bar{I}, \bar{J})(V) \subset (\mathbb{P})^2 \quad \text{und}$$

$$[I_1; I_2; J_1; J_2] = g \circ (I, J) \quad \text{auf } U$$

$$[\bar{I}_1; \bar{I}_2; \bar{J}_1; \bar{J}_2] = g \circ (\bar{I}, \bar{J}) \quad \text{auf } V$$

mit einer holomorphen Abbildung $g : (I, J)(U) \longrightarrow \mathbb{P}_3$.

(Dies bedeutet geometrisch, die Mengen

$$U_I := (I, J, [I_1; I_2; J_1; J_2])(U)$$

$$V_I := (\bar{I}, \bar{J}, [\bar{I}_1; \bar{I}_2; \bar{J}_1; \bar{J}_2])(V)$$

$$\text{in } (\mathbb{P})^2 \times \mathbb{P}_3$$

sind (als lokale Untermannigfaltigkeiten) identisch.)

Beweis: Da W_M von Typ (II) ist, gilt insbesondere für $a \in A$

I/U_a und J/U_a sind (lokale) Halbinvariante vom Gewicht 0 des lokalen Gewebes $W_a = (U_a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a)$ und folglich werden weitere lokale Halbinvarianten $I_1^a, I_2^a, J_1^a, J_2^a \in \mathbb{R}^a(U_a)$ durch

$$d I/U_a = I_2^a \omega_1^a - I_1^a \omega_2^a \quad \text{und} \quad d J/U_a = J_2^a \omega_1^a - J_1^a \omega_2^a$$

definiert, die von Gewicht 1 sind. (Vgl. I.1.4 und 1.7).

Da die wesentlichen Invarianten I, J analytisch unabhängig sind, müssen sie insbesondere nichtkonstant sein, also ist mindestens je eine der Halbinvarianten I_1^a, I_2^a bzw. J_1^a, J_2^a nicht identisch 0.

Es gibt somit $I_1^a \neq 0$ für $\{i, j\} = \{1, 2\}$

bzw. $J_k^a \neq 0$ für $\{k, l\} = \{1, 2\}$.

Mit dem Verfahren von I.2.8 sind somit globale Invarianten

$$I_j I_1^{-1}, J_l I_1^{-1}, J_2 I_1^{-1} \in \mathcal{G}(W_M) \quad \text{bzw.} \quad I_1 J_k^{-1}, I_2 J_k^{-1}, J_1 J_k^{-1} \in \mathcal{G}(W_M)$$

als meromorphe Funktionen auf M wohldefiniert.

Da f gewebetreu und $\bar{I}, \bar{J}$ die zu I, J analogen Invarianten sind, so können auch die entsprechenden (abgeleiteten) Invarianten

$$\bar{I}_j \bar{I}_1^{-1}, \dots, \bar{J}_l \bar{J}_1^{-1} \quad (\text{mit den gleichen Nummern } i, j, k, l !)$$

als meromorphe Funktionen auf N definiert werden.

Sei nun Z_M die analytische Menge in M , die aus den Unbestimmtheitsstellen von I, J , dem Durchschnitt der Unbestimmtheitsstelle einerseits der Funktionen $\{I_1 I_1^{-1}, J_1 I_1^{-1}, J_2 I_1^{-1}\}$ mit denen der Funktionen $\{I_1 J_k^{-1}, I_2 J_k^{-1}, J_1 J_k^{-1}\}$ andererseits, den Nullstellen von $d I \wedge d J$ (sowie den Nullstellen der Funktionaldeterminante von f (in den lokalen Koordinaten)) besteht. (Siehe bzgl. f auch unten!) Die analytische Menge Z_N in N werde mit den analogen Bedingungen (abgesehen von der mit f definierten) beschrieben.

Offensichtlich folgt:

$$(I, J) / M - Z_M : M - Z_M \longrightarrow (\mathbb{P})^2 \quad \text{und}$$

$$(\bar{I}, \bar{J}) / N - Z_N : N - Z_N \longrightarrow (\mathbb{P})^2$$

sind wohldefinierte lokal biholomorphe Abbildungen.

Ausserdem werden durch

$$\begin{aligned} [I_1 : I_2 : J_1 : J_2] : M - Z_M &\longrightarrow \mathbb{P}_3 \\ U_a \ni x &\longmapsto [I_1^a(x) : I_2^a(x) : J_1^a(x) : J_2^a(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\bar{I}_1 : \bar{I}_2 : \bar{J}_1 : \bar{J}_2] : N - Z_N &\longrightarrow \mathbb{P}_3 \\ U_b \ni y &\longmapsto [\bar{I}_1^b(y) : \bar{I}_2^b(y) : \bar{J}_1^b(y) : \bar{J}_2^b(y)] \end{aligned}$$

auch holomorphe Abbildungen (eigentlich durch die Abbildungen

$$(I_1 I_1^{-1}, J_1 I_1^{-1}, J_2 I_1^{-1}) \text{ bzw. } (I_1 J_k^{-1}, I_2 J_k^{-1}, J_1 J_k^{-1}) : M - Z_M \longrightarrow (\mathbb{P})^3$$

und den analogen auf N) definiert, so dass gilt:

$$\begin{aligned} [I_1 : I_2 : J_1 : J_2] &= [\bar{I}_1 : \bar{I}_2 : \bar{J}_1 : \bar{J}_2] \circ f \quad \text{auf } (M - Z_M) \cap f^{-1}(N - Z_N), \\ (I, J) &= (\bar{I}, \bar{J}) \circ f \quad \quad \quad " \quad \quad \quad " \quad \quad \quad . \end{aligned}$$

Zu einem festen $x \in M - Z_M$ mit $f(x) \in N - Z_N$ betrachte man offene Umgebungen $U \subset M - Z_M$ von x und $V \subset N - Z_N$ von $f(x)$, so dass

$(I, J) / U$ und $(\bar{I}, \bar{J}) / V$ aufs Bild biholomorph sind.

(Hieraus folgt übrigens, dass $f / M - Z_M$ lokal biholomorph ist!)

Offenbar kann man U und V noch so verkleinern, dass

$$(I, J)(U) = (\bar{I}, \bar{J})(V) \subset (\mathbb{P})^2 \quad (\text{wegen } (I, J) = (\bar{I}, \bar{J}) \circ f)$$

Dann sind $g := [I_1: I_2: J_1: J_2] \circ (I, J)^{-1}$, $\bar{g} := [\bar{I}_1: \bar{I}_2: \bar{J}_1: \bar{J}_2] \circ (\bar{I}, \bar{J})^{-1}$

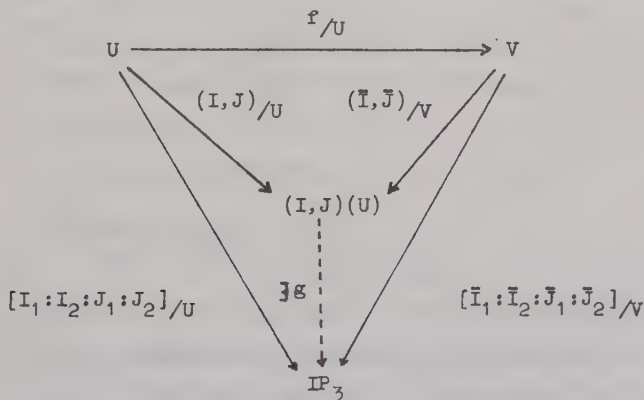
holomorphe Abbildungen von $(I, J)(U)$ nach $\mathbb{P}_3$.

Für $P \in (I, J)(U)$ mit $P = (I, J)(\hat{x}) = (\bar{I}, \bar{J})(f(\hat{x}))$ für genau bestimmtes $\hat{x} \in U$ gilt dann:

$$\begin{aligned} g(P) &= (g \circ (I, J))(\hat{x}) = [I_1: I_2: J_1: J_2](\hat{x}) \\ &= [\bar{I}_1: \bar{I}_2: \bar{J}_1: \bar{J}_2](f(\hat{x})) = (\bar{g} \circ (\bar{I}, \bar{J}))(f(\hat{x})) \\ &= \bar{g}(P) \end{aligned}$$

Da P beliebig aus $(I, J)(U)$ gewählt werden kann, folgt $g = \bar{g}$.

Man könnte anstatt der vorstehenden Argumentation auch das folgende Diagramm ausnützen:



Da das äussere und das obere innere Diagramm kommutieren, müssen die beiden unteren inneren Diagrammdreiecke mit einem geeigneten g kommutieren.

Damit ist der Satz bewiesen.

In den nächsten Sätzen wird gezeigt, dass die Notwendigkeitsbedingungen der letzten beiden Sätze im wesentlichen auch hinreichen, lokale gewebetreue Abbildungskeime zu konstruieren.

2.7 Satz (Existenz lokaler gewebetreuer Abbildungen bei Geweben von Typ (II))

Seien M, N 2-dimensionale offene komplexe Mannigfaltigkeiten mit meromorphen Geweben $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf M , $W_N = (U_b, W_b)_{b \in B}$ auf N vom Typ (II).

Die wesentlichen Invarianten $I, J \in \mathcal{G}(W_M)$ und $\bar{I}, \bar{J} \in \mathcal{G}(W_N)$ seien analog definiert.

Weiter seien $Z_M \subset M$ und $Z_N \subset N$ analytische Mengen, so dass $(I, J)/_{M-Z_M}$ bzw. $(\bar{I}, \bar{J})/_{N-Z_N}$ lokal biholomorphe und $[I_1: I_2: J_1: J_2]/_{M-Z_M}$ bzw. $[\bar{I}_1: \bar{I}_2: \bar{J}_1: \bar{J}_2]/_{N-Z_N}$ holomorphe Abbildungen in $(\mathbb{P})^2$ bzw. $\mathbb{P}_3$ definieren.

Seien $x \in M - Z_M$ und $y \in N - Z_N$ mit $(I, J)(x) = (\bar{I}, \bar{J})(y) := P$. Ausserdem gebe es eine offene Umgebung $\hat{U}$ von P in $(\mathbb{P})^2$ und eine holomorphe Abbildung $g: \hat{U} \longrightarrow \mathbb{P}_3$, so dass

$$[I_1: I_2: J_1: J_2] = g \circ (I, J) \quad \text{auf } U_0 := (I, J)^{-1}(\hat{U}) \cap (M - Z_M)$$

$$[\bar{I}_1: \bar{I}_2: \bar{J}_1: \bar{J}_2] = g \circ (\bar{I}, \bar{J}) \quad \text{auf } V_0 := (\bar{I}, \bar{J})^{-1}(\hat{U}) \cap (N - Z_N)$$

Dann definiert $f_P := (\bar{I}, \bar{J})^{-1} \circ (I, J)/_U$ eine gewebetreue Abbildung $f_P: W_{M/U} \longrightarrow W_N$ mit $f_P(x) = y$ für geeignete offene Umgebung $U \subset U_0$ von x .

(Dies bedeutet geometrisch: es gibt lokale gewebetreue Abbildungen, wenn die Mengenkeime $(I, J, [I_1: I_2: J_1: J_2])_x$ und $(\bar{I}, \bar{J}, [\bar{I}_1: \bar{I}_2: \bar{J}_1: \bar{J}_2])_y$ in $(\mathbb{P})^2 \times \mathbb{P}_3$ regulär sind und übereinstimmen).

Beweis: Die analytischen Mengen Z_M (bzw. Z_N) werden so definiert, dass $(I, J)/_{M-Z_M}$ lokal biholomorph und $[I_1: I_2: J_1: J_2]/_{M-Z_M}$ holomorph wohldefiniert sind, genauso für Z_N . (Vgl. Beweis zu 2.6)

Daraus folgt offensichtlich, es gibt $U \subset U_0$ und $V \subset V_0$ derart, dass: $(I, J)/_U$ und $(\bar{I}, \bar{J})/_V$ sind biholomorph aufs Bild;

$$(I, J)(U) = (\bar{I}, \bar{J})(V) =: \tilde{U} \subset \hat{U} \quad \text{mit } P \in \tilde{U}, x \in U \text{ und } y \in V.$$

Ausserdem gibt es $a \in A$ und $b \in B$, so dass (mit eventueller Verkleinerung von U, V bzw. Einschränkung W_a/U und W_b/V):
 $W_a = (U_a = U, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a)$ und $W_b = (U_b = V, \omega_1^b, \omega_2^b, \omega_3^b, \gamma^b)$
 sind die lokalen Gewebe auf U bzw. V um x bzw. um y .

Wegen der Biholomorphie von $(I, J)/U$ und $(\bar{I}, \bar{J})/V$ werden meromorphe (lokale) Gewebe (vgl. hierzu 0.3 und I.2.5);

$$W_1 = (I, J)^*/_U (W_a) = (\tilde{U}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma)$$

$$W_2 = (\bar{I}, \bar{J})^*/_V (W_b) = (\tilde{U}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Gamma) \text{ auf } \tilde{U} \text{ induziert}$$

Durch evtl. nochmaliges Verkleinern von U, V und $\tilde{U}$ kann man erreichen, dass es auf $\tilde{U}$ Koordinaten (z, w) gibt und somit

$$\omega_1 = a_1(z, w) dz + b_1(z, w) dw \quad \text{mit } a_1, b_1 \in \mathbb{R}^0(\tilde{U})$$

$$\lambda_1 = A_1(z, w) dz + B_1(z, w) dw \quad \text{mit } A_1, B_1 \in \mathbb{R}^0(\tilde{U})$$

für $i = 1, 2, 3$ geschrieben werden kann. Hieraus folgt:

(wenn $P \in \mathbb{C}^2 \subset (\mathbb{IP})^2$, ansonsten analog mit $(I, J^{-1}), (I^{-1}, J)$,
 oder (I^{-1}, J^{-1}) !)

$$\omega_1^a = a_1(I, J) dI + b_1(I, J) dJ$$

$$= (a_1(I, J) I_2^a + b_1(I, J) J_2^a) \omega_1^a - (a_1(I, J) I_1^a + b_1(I, J) J_1^a) \omega_2^a$$

$$\omega_1^b = A_1(\bar{I}, \bar{J}) d\bar{I} + B_1(\bar{I}, \bar{J}) d\bar{J}$$

$$= (A_1(\bar{I}, \bar{J}) \bar{I}_2^b + B_1(\bar{I}, \bar{J}) \bar{J}_2^b) \omega_1^b - (A_1(\bar{I}, \bar{J}) \bar{I}_1^b + B_1(\bar{I}, \bar{J}) \bar{J}_1^b) \omega_2^b$$

für $i = 1, 2$ wegen der lokalen Halbinvarianten $I_1^a, \dots$ etc.:

$$dI/U_a = I_2^a \omega_1^a - I_1^a \omega_2^a \quad \text{bzw.} \quad d\bar{I}/V_b = \bar{I}_2^b \omega_1^b - \bar{I}_1^b \omega_2^b$$

$$dJ/U_a = J_2^a \omega_1^a - J_1^a \omega_2^a \quad \text{bzw.} \quad d\bar{J}/V_b = \bar{J}_2^b \omega_1^b - \bar{J}_1^b \omega_2^b$$

mit $I_1^a, I_2^a, J_1^a, J_2^a \in \mathbb{R}^0(U_a)$ und $\bar{I}_1^b, \bar{I}_2^b, \bar{J}_1^b, \bar{J}_2^b \in \mathbb{R}^0(U_b)$.

Offenbar gilt $[I_1: I_2: J_1: J_2](\hat{x}) = [I_1^a(\hat{x}): I_2^a(\hat{x}): J_1^a(\hat{x}): J_2^a(\hat{x})]$

$$\text{und } [\bar{I}_1: \bar{I}_2: \bar{J}_1: \bar{J}_2](\hat{y}) = [\bar{I}_1^b(\hat{y}): \bar{I}_2^b(\hat{y}): \bar{J}_1^b(\hat{y}): \bar{J}_2^b(\hat{y})]$$

für $\hat{x} \in U_a$ und $\hat{y} \in U_b$

Sei $D_a^{-1} := (I_1^a I_2^a - I_2^a J_1^a) \in \mathbb{R}^0(U_a)$; D_a ist nicht identisch Null, da I, J wesentliche Invarianten von W_M , also analytisch unabhängig.

Aus der Unabhängigkeit der Gewebedifferentialformen ω_1^a, ω_2^a (bzw. ω_1^b, ω_2^b) (nach I.1.1 b)) folgen die Gleichungen: (auf $\tilde{U}_a$)

$$a_1(I, J) I_1^a + b_1(I, J) J_1^a = 0 \quad a_2(I, J) I_1^a + b_2(I, J) J_1^a = -1$$

$$a_1(I, J) I_2^a + b_1(I, J) J_2^a = 1 \quad a_2(I, J) I_2^a + b_2(I, J) J_2^a = 0$$

mit den Lösungen

$$a_1(I, J) = -J_1^a D_a \quad a_2(I, J) = I_1^a D_a$$

$$b_1(I, J) = -J_2^a D_a \quad b_2(I, J) = I_2^a D_a$$

Also folgt: (auf $\tilde{U}$ mit $D_1 := D_a \circ (I, J)^{-1} / U_a$)

$$\omega_i = D_i \cdot (-J_1^a \circ (I, J)^{-1} dz + I_1^a \circ (I, J)^{-1} dw) \quad \text{für } i = 1, 2 (*)$$

Mit analogen Überlegungen (und entsprechenden Begriffen) ist:

$$\lambda_i = D_i \cdot (-J_1^b \circ (\bar{I}, \bar{J})^{-1} dz + \bar{I}_1^b \circ (\bar{I}, \bar{J})^{-1} dw) \quad \text{für } i = 1, 2 (**)$$

mit geeignetem $D_2 \in \mathfrak{M}^0(\tilde{U})$.

Für die Ähnlichkeit der Gewebe W_1 und W_2 genügt es zu zeigen:

$$\omega_i \wedge \lambda_i = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad \text{auf offener Teilmenge von } \tilde{U}. (I.2.6)$$

Dies bedeutet die folgenden Gleichungen: (für $i = 1, 2, 3$)

$$D_1 D_2 (I_1^a(I, J) \bar{J}_1^b(\bar{I}, \bar{J}) - J_1^a(I, J) \bar{I}_1^b(\bar{I}, \bar{J})) = 0 \quad \text{auf } \tilde{U} \quad (*)$$

Ausserhalb der Polstellenmenge von $D_1, D_2, I_1^a(I, J), \dots, \bar{J}_1^b(\bar{I}, \bar{J})$

$$i = 1, 2 \quad (\text{und } 3 \text{ wegen } I_1^a + I_2^a + I_3^a = 0, \omega_1^a + \omega_2^a + \omega_3^a = 0, \text{etc.})$$

gilt nun sicherlich:

Zu jedem $\hat{P} \in \tilde{U}$ gibt es genau ein $\hat{x} \in U$ und genau ein $\hat{y} \in V$ mit

$$\hat{P} = (I, J)(\hat{x}) = (\bar{I}, \bar{J})(\hat{y}) \quad \text{und nach Voraussetzung ist}$$

$$[I_1; I_2; J_1; J_2](\hat{x}) = (g \circ (I, J))(\hat{x}) = g(\hat{P})$$

$$= (g \circ (\bar{I}, \bar{J}))(\hat{y}) = [\bar{I}_1; \bar{I}_2; \bar{J}_1; \bar{J}_2](\hat{y})$$

Deswegen folgt: (wie schon oben bemerkt mit den lokalen $I_1^a, \dots$)

$$g(\hat{P}) = [I_1^a(\hat{x}); I_2^a(\hat{x}); J_1^a(\hat{x}); J_2^a(\hat{x})] = [\bar{I}_1^b(\hat{y}); \bar{I}_2^b(\hat{y}); \bar{J}_1^b(\hat{y}); \bar{J}_2^b(\hat{y})]$$

Nach Definition der homogenen Koordinaten in $\mathbb{P}_3$ gibt es $0 \neq c_{\hat{P}} \in \mathbb{C}^*$.

$$I_1^a(\hat{x}) = c_{\hat{P}} \bar{I}_1^b(\hat{y}) \quad \text{und} \quad J_1^a(\hat{x}) = c_{\hat{P}} \bar{J}_1^b(\hat{y}) \quad \text{für } i = 1, 2, (**)$$

Hieraus folgt (auf offenen Teil $\neq \emptyset$ von $\tilde{U}$) punktweise (*)

$$\text{für } i = 1, 2 \quad (\text{und auch } 3!): W_1 \text{ und } W_2 \text{ sind ähnliche Gewebe.}$$

Dies impliziert die Behauptung des Satzes.

Für eine entsprechende Aussage über Gewebe von Typ (I) mit einer wesentlichen Invarianten I wird eine der Invarianten I_{11}, I_1^{-2} mit $i \in \{1, 2, 3\}$ gebraucht. Da I nicht identisch konstant ist, (vgl. I.1.9!), kann man mindestens ein solches i finden. O.E. kann $i = 3$ gesetzt werden, da man leicht den Beweis abändern kann, wenn $I_3 = 0$ sein sollte.

2.8 Satz (Existenz lokaler gewebetreuer Abbildungen für Typ (I))

Seien M, N komplexe 2-dimensionale offene Mannigfaltigkeiten mit meromorphen Geweben $W_M = (U_a, W_a)_{a \in A}$ auf M, $W_N = (U_b, W_b)_{b \in B}$ auf N von Typ (I) mit den wesentlichen Invarianten

$$I = K_1^2 K^{-3} \text{ auf } M \text{ bzw. } \bar{I} = \bar{K}_1^2 \bar{K}^{-3} \text{ auf } N.$$

Ausserdem seien folgende Invarianten noch wohldefiniert:

$$J := I_{33} I_3^{-2} \text{ auf } M \text{ bzw. } \bar{J} := \bar{I}_{33} \bar{I}_3^{-2} \text{ auf } N.$$

Weiter seien $Z_M \subset M$ und $Z_N \subset N$ analytische Mengen derart, dass $I/M - Z_M, J/M - Z_M$ bzw. $\bar{I}/N - Z_N, \bar{J}/N - Z_N$ holomorphe Abbildungen nach $\mathbb{P}$ definieren.

Es seien nun offene nichtleere Mengen $U \subset M - Z_M, V \subset N - Z_N$ gegeben, die folgenden Bedingungen genügen:

a) $I(U) = I(V) =: \tilde{U} \subset \mathbb{P}$

b) Es gibt eine holomorphe Abbildung $g : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{P}$ mit:

$$J/U = g \circ I/U \quad \text{sowie} \quad \bar{J}/V = g \circ \bar{I}/V$$

c) Es gibt nichtkonstante Funktionen $F \in \mathcal{O}(U), \bar{F} \in \mathcal{O}(V)$ mit

$$dF \wedge dI/U \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad d\bar{F} \wedge d\bar{I}/V \neq 0$$

d) Für ein lokales Gewebe $W_a = (U_a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a)$ von W_M mit

$$U_a \cap U \neq \emptyset \text{ gilt: } \omega_3^a \wedge dF = 0 \text{ auf } U_a \cap U.$$

(Entsprechendes gilt für ein $W_b = (U_b, \omega_1^b, \omega_2^b, \omega_3^b, \gamma^b)$ von W_N für $\bar{F}$)

Dann gibt es offene nichtleere Mengen $U_1 \subset U, V_1 \subset V$ derart, dass zu jedem $x \in U_1, y \in V_1$ mit $I(x) = \bar{I}(y)$ ein holomorpher gewebetreuer Abbildungskeim $f_{x,y}$ mit $f_{x,y}(x) = y$ existiert:

es gibt eine offene Menge $U_x \subset U$, holomorphe Abbildung $f_{x,y} : U_x \longrightarrow V$ so dass $f_{x,y} : W_M/U_x \longrightarrow W_N$ gewebetreu ist.

(Die Bedingungen c), d) sind technischer Natur und fast überall realisierbar: d) Poincaré-Lemma; c) evtl. mit Permutationen).

Beweis: 1) Die analytische Menge $Z_M \subset M$ sei als die Menge der Unstimmtheitsstellen von den meromorphen Invariantenfunktionen $I = K_1^2 K^{-3}$ sowie $J := I_{33}^{-2}$ (für I_3^a, I_{33}^a wie in I. §2) mit der Menge der Nullstellen von dI definiert; sowie Z_N in N analog. Nach Voraussetzung gibt es $a \in A$ (bzw. $b \in B$) sowie $F \in \mathcal{M}^0(U)$ mit $dF \wedge \omega_3^a = 0$ auf $U \cap U_a \neq \emptyset$. Sei $U_0 \subset U$ eine zusammenhängende offene Menge mit $F|_{U_0} \in \mathcal{M}^0(U_0)$ sowie $dI \wedge dF \neq 0$ auf U_0 .

Dann gibt es ein meromorphes Gewebe $(U_0, \omega_1, \omega_2, dF|_{U_0}, \gamma) =: W_1$, so dass W_1 und W_{M/U_0} ähnliche Gewebe sind. (Mithilfe von 0.9)

Analog existiert ein entsprechendes Gewebe $W_2 = (V_0, \lambda_1, \lambda_2, d\bar{F}|_{V_0}, \bar{\gamma})$ wobei V_0 noch so gewählt werden kann, dass $I(U_0) \cap \bar{I}(V_0) \neq \emptyset$.

Offenbar kann man dann noch durch evtl. Verkleinern von U_0 und V_0 erreichen, dass $I(U_0) = \bar{I}(V_0) =: \bar{U} \subset \mathbb{P}$ und zusammenhängend ist (da dI und $d\bar{I}$ auf U bzw. V nicht verschwinden, vgl. Z_M, Z_N !).

Da (I, F) und $(\bar{I}, \bar{F})$ lokal biholomorph sind, kann man U_0 und V_0 noch weiter so beschränken, dass $(I, F)|_{U_0}$ und $(\bar{I}, \bar{F})|_{V_0}$ auf ihre Bilder $U_2, V_2 \subset \mathbb{P} \times \mathbb{C}$ biholomorph und $I(U_0) = \bar{I}(V_0)$ gilt.

Dann werden meromorphe Gewebe auf U_2 , bzw. V_2 induziert:

$$\bar{W}_1 = f_1^*(W_1) = (U_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, d\bar{w}) \quad \text{bzgl. } ((I, F)|_{U_0})^{-1} =: f_1$$

$$\bar{W}_2 = f_2^*(W_2) = (V_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, d\bar{w}) \quad \text{bzgl. } ((\bar{I}, \bar{F})|_{V_0})^{-1} =: f_2$$

für Koordinaten (z, w) auf U_2 (evtl. muss man (I^{-1}, F) nehmen),

für Koordinaten $(\bar{z}, \bar{w})$ auf V_2 (evtl. zu $(\bar{I}^{-1}, \bar{F})$ übergehen).

Mit evtl. weiterer Verkleinerung von U_0 und V_0 kann man davon ausgehen, dass (z, w) bzw. $(\bar{z}, \bar{w})$ globale Koordinaten von U_0 bzw. V_0 sind und man somit die Differentialformen explizit erhält:

$$\bar{\omega}_1 = a_1(z, w) dz + b_1(z, w) dw \quad \text{für } a_1, b_1 \in \mathcal{M}^0(U_2) \text{ mit } i = 1, 2$$

$$\bar{\lambda}_1 = A_1(\bar{z}, \bar{w}) d\bar{z} + B_1(\bar{z}, \bar{w}) d\bar{w} \quad \text{für } A_1, B_1 \in \mathcal{M}^0(V_2) \text{ mit } i = 1, 2$$

Damit kann man wieder gewisse Gleichungen aufstellen:

Wegen $d I/U_0 = I_2^0 \omega_1 - I_1^0 \omega_2$ und $d \bar{I}/V_0 = \bar{I}_2^0 \lambda_1 - \bar{I}_1^0 \lambda_2$
mit den lokalen Halbinvarianten $I_1^0, I_2^0 \in \mathfrak{M}^0(U_0)$ von W_{M/U_0} bzw.
 $\bar{I}_1^0, \bar{I}_2^0 \in \mathfrak{M}^0(V_0)$ von W_{N/V_0} vom Gewicht 1 erhält man:

$$a_1(I, F) I_1^0 = b_1(I, F) \quad a_2(I, F) I_1^0 = b_2(I, F) - 1$$

$$a_1(I, F) I_2^0 = 1 - b_1(I, F) \quad a_2(I, F) I_2^0 = -b_2(I, F)$$

Andrerseits gilt für $I_3^0 = -I_1^0 - I_2^0$ (vgl. I.1.4) auf U_0 :

$$d I/U_0 = I_3^0 \omega_1 - I_1^0 \omega_3 \quad \text{und wegen c) und d) gilt noch:}$$

$$0 \neq \omega_3 \wedge d I/U_0 = I_3^0 \omega_3 \wedge \omega_1 \quad \text{also ist } I_3^0 \neq 0. (\text{auf } U_0).$$

Damit folgt: (auf U_0 bzw. mit analogen Überlegungen auf V_0)

$$\omega_1 = (I_3^0)^{-1} d I/U_0 - I_1^0 (I_3^0)^{-1} d F \quad \lambda_1 = (\bar{I}_3^0)^{-1} d \bar{I}/V_0 - \bar{I}_1^0 (\bar{I}_3^0)^{-1} d \bar{F}$$

$$\omega_2 = -(I_3^0)^{-1} d I/U_0 - I_2^0 (I_3^0)^{-1} d F \quad \lambda_2 = -(\bar{I}_3^0)^{-1} d \bar{I}/V_0 - \bar{I}_2^0 (\bar{I}_3^0)^{-1} d \bar{F}$$

2) Seien nun $x \in U_0$ und $y \in V_0$ mit $I(x) = I(y)$ vorgegeben.

Dann sind gesucht:

- Umgebungen U_1 von x und V_1 von y (in U_0 bzw. in V_0)
- eine gewebetreue Abbildung $\bar{F}_{x,y}$ von $U_1^* := (I, F)(U_1)$ nach $V_1^* := (\bar{I}, \bar{F})(V_1)$ (kurz: $\bar{F}_{x,y}: W_{1/U_1^*} \longrightarrow W_{2/V_1^*}$)

Denn dann folgt die Existenz der gesuchten gewebetreuen lokalen Abbildung wie aus folgendem Diagramm ersichtlich:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \overset{\exists f_{x,y}}{\dashrightarrow} & V_1 \\ \downarrow (I, F) & & \downarrow (\bar{I}, \bar{F}) \\ U_1^* & \xrightarrow{\bar{F}_{x,y}} & V_1^* \end{array}$$

Nun werden die zugehörigen Differentialgleichungen aufgestellt:

Seien $P := (I, F)(x)$ und $Q := (\bar{I}, \bar{F})(y)$, sowie $U(P) \subset U_2$ eine kleine offene Umgebung von P . Da auf U_2 und V_2 Koordinaten (z, w) bzw. $(\bar{z}, \bar{w})$ existieren, lässt sich schreiben:

$\bar{f}_{x,y} = (h_1, h_2)$ mit $h_1, h_2 \in \mathcal{Q}^0(U(P))$

für (falls existent) gewebetreue Abbildung $\bar{f}_{x,y}: \bar{W}_1/U(P) \longrightarrow \bar{W}_2$

Dann muss notwendig gelten:

$$h_1(z, w) = z \quad (\text{dh. } h_1 = \text{pr}_1/U(P))$$

(wegen $I = \bar{I} \circ f_{x,y} = \bar{I} \circ (\bar{I}, \bar{F})^{-1} \circ \bar{f}_{x,y} \circ (I, F) = h_1 \circ I$ auf $U(P)$).

$$\bar{\omega}_1 \wedge (\bar{f}_{x,y})^*(\bar{\lambda}_1) = 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \quad \text{auf } U(P) \quad \text{sowie}$$

$$d\bar{w} \wedge dh_2 = d\bar{w} \wedge (\bar{f}_{x,y})^*(d\bar{w}) = 0 \quad \text{auf } U(P)$$

(dies folgt, da $\bar{f}_{x,y}$ gewebetreu ist, aus der Ähnlichkeit der Gewebe $(\bar{f}_{x,y})$ ($\bar{W}_2$) und $\bar{W}_1$; vgl. auch I.2.5, 6 c))!

Einsetzen in die obigen expliziten Gleichungen für $\omega_1, \omega_2, \lambda_1, \lambda_2$ liefert folgende Bedingungen an $\bar{f}_{x,y}$ bzw. nur bloss an h_2 :

$$h_2(z, w) = h(w) \quad (\text{dh. } h := h_2 \in \mathcal{Q}^0(\text{pr}_2(U(P)))!)$$

$$F_1(z, w) \cdot [((\bar{I}_3^0)^{-1} \circ (\bar{I}, \bar{F})^{-1})_{/V_2}(z, h(w)) - ((I_3^0)^{-1} \circ (I, F)^{-1})_{/U_2}(z, w) \cdot h'(w)] = 0$$

auf $U(P)$ mit $F_1 := (I_1^0 (I_3^0)^{-1}) \circ (I, F)^{-1}_{/U(P)} \in \mathcal{Q}^0(U(P))$, $i = 1, 2$

Die meromorphen Funktionen F_1, F_2 sind genau die (abgeleiteten)

Invarianten der wesentlichen Invariante von $\bar{W}_1$; wie schon

oben gezeigt worden war, ist $I_3^0 = -I_1^0 - I_2^0 \neq 0$. Dann kann aber

mindestens eine der Funktionen auf $U(P)$ nicht identisch ver-

schwinden. Folglich erhält man für h die folgende Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} h'(w) &= ((\bar{I}_3^0)^{-1} \circ (\bar{I}, \bar{F})^{-1})_{/V_2}(z, h(w)) \cdot (I_3^0 \circ (I, F)^{-1})_{/U_2}(z, w) \\ &= H(z, w, h(w)) \end{aligned}$$

mit $H \in \mathcal{Q}^0(U_2 \times \text{pr}_2(V_2))$, aber H nicht identisch Null;

(wenn man U_2 und V_2 durch Herausnehmen der Unbestimmtheitsstellen von $I_3^0 \circ (I, F)^{-1}_{/U_2}$ bzw. von $(\bar{I}_3^0)^{-1} \circ (\bar{I}, \bar{F})^{-1}_{/V_2}$ geeignet einschränkt.)

Es kann sogar noch gezeigt werden, dass H nicht von z abhängt.

3) Behauptung: H hängt nicht von z ab, d.h.: $H \in \mathbb{R}^0(\text{pr}_2(U_2) \times \text{pr}_2(V_2))$

Es genügt, dies auf einer offenen Teilmenge von $U_2 \times \text{pr}_2(V_2)$ zu zeigen.

Seien $x_0 \in U_0$ und $y_0 \in V_0$, so dass

$$I(x_0) = \bar{I}(y_0) \quad \text{sowie} \quad I_{33}^0(x_0) \neq 0, \bar{I}_{33}^0(y_0) \neq 0$$

(dies ist möglich, da $I_{33}^0, \bar{I}_{33}^0$ nicht identisch verschwinden)

Ausserdem gilt nach Voraussetzung

$$I_{33} (I_3)^{-2} = g \circ I \quad \text{sowie} \quad \bar{I}_{33} (\bar{I}_3)^{-2} = g \circ \bar{I} \quad \text{auf } U_0 \text{ bzw. } V_0$$

mit $g \in \Omega^0(I(U_0))$ und gleiches insbesondere für $I_{33}^0, I_{33}^0, \bar{I}_{33}^0, \bar{I}_{33}^0$.

Für das Gewebe $W_1 = (U_0, \omega_1, \omega_2, dF, \gamma)$ gilt: (analog für W_2 !)

$$dF \wedge \gamma = d(dF) = 0 \quad \text{und}$$

$$I_{33}^0 \omega_1 = d I_{/U_0} + I_1^0 dF$$

Sei $U(x_0)$ offene Umgebung von x_0 , so dass $\lg(I_{33}^0) \in \Omega^0(U(x_0))$ wohldefiniert ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} d(\lg(I_{33}^0)) \wedge dF &= (I_{33}^0)^{-1} (I_{33}^0 \gamma + I_{33}^0 \omega_1 - I_{33}^0 dF) \wedge dF \\ &= (I_{33}^0)^{-1} I_{33}^0 \omega_1 \wedge dF \quad (\text{wegen obiger Formeln}) \\ &= (I_{33}^0)^{-2} I_{33}^0 dI \wedge dF \quad \text{auf } U(x_0) \subset U_0 \\ &= g(I) dI \wedge dF \quad (\text{Voraussetzung siehe oben}) \end{aligned}$$

Durch Übergang auf $(I, F)(U(x_0))$ mithilfe von (I, F) folgt:

$$d((\lg(I_{33}^0)) \circ (I, F)_{/U_2}^{-1}) \wedge dw = g(z) dz \wedge dw$$

Dann muss aber auf $(I, F)(U(x_0))$ gelten:

$$d((\lg(I_{33}^0)) \circ (I, F)_{/U_2}^{-1}) = g(z) dz + b(z, w) dw, \text{ mit } b \in \Omega^0(U_2)$$

$$\rightarrow 0 = d(d(\lg(I_{33}^0)) \circ (I, F)_{/U_2}^{-1}) = (b_z - g_w) dz \wedge dw = b_z dz \wedge dw$$

Also folgt: $b(z, w) = b(w)$ dh. $b \in \Omega^0(\text{pr}_2(U_2))$

Insgesamt gilt also:

$$(I_{33}^0) \circ (I, F)_{/U_2}^{-1} = \exp \left(\int g(z) dz \right) B(w) \quad \text{auf geeigneter offener}$$

Umgebung $(U((I, F)(x_0))) =: U^0$ mit $B \in \Omega^0(U^0)$

Man kann nun analoges auf geeigneter Umgebung $V((\bar{I}, \bar{F})(y_0)) =: V^0$ von $(I, F)(y_0)$ in V_2 mit dem gleichen g durchführen, so dass

$$(\bar{I}_3^0) \circ (I, F)^{-1}_{V_2} = \exp\left(\int g(\bar{z}) d\bar{z}\right) \bar{B}(\bar{w}) \quad \text{auf } V^0$$

mit $B \in \Omega^0(V^0)$ gilt.

Damit folgt offenbar die Behauptung $H = H(w, \bar{w})$.

- 4) Das Existenzproblem von lokalen gewebetreuen Abbildungen auf U_0 hat sich somit auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$h'(w) = H(w, h(w)) \quad \text{mit } H \in \mathcal{M}^0(\text{pr}_2(U_2) \times \text{pr}_2(V_2))$$

reduziert.

Seien $U_1 \subset U_0$ und $V_1 \subset V_0$ derart, dass $H \in \Omega^0(\text{pr}_2(U_1) \times \text{pr}_2(V_1))$

(dh. man nehme die Polstellen von H auf U_0 und V_0 aus)

die im wesentlichen durch die Pol- und Nullstellen von I_3^0 auf U_0 und von $\bar{I}_3^0$ auf V_0 definiert werden und somit analytische Mengen in U_0 bzw. in V_0 sind).

Dann wird für $x \in U_1$ und $y \in V_1$ mit $I(x) = I(y)$

die zugehörige gewebetreue Abbildung $f_{x,y}$ durch das

Anfangswertproblem: (auf $(I, F)(U_1) \subset U_2$)

$$h(F(x)) = \bar{F}(y)$$

$$h' = H(w, h) \quad \text{bestimmt}$$

Nach bekannten Sätzen aus der Theorie der gewöhnlichen komplexen Differentialgleichungen (vgl. [4], S.1 ff) hat dieses Problem immer eine Lösung (h, U_h) :

U_h offene Umgebung von $F(x)$

$$h: U_h \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } h(F(x)) = \bar{F}(y) \quad \text{und } h \in \Omega^0(U_h).$$

Gemäss 2) definiert $\bar{f}_{x,y} = (\text{pr}_1/V_1, h)$ auf geeigneter offenen Menge in U_2 einen gewebetreuen Abbildungskeim für die Gewebe

$\bar{W}_1, \bar{W}_2$ in $(I, F)(x)$, der mithilfe von (I, F) und $(\bar{I}, \bar{F})$ einen

gewebetreuen Abbildungskeim $f_{x,y}$ für W_M und W_N von x nach y

induziert. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Den letzten Sätzen kann man folgendes Kriterium für den Typ eines meromorphen Gewebes entnehmen:

2.9 Folgerung

Sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ ein meromorphes Gewebe auf einer komplexen 2-dimensionalen offenen Mannigfaltigkeit M . Dann gilt:

a) W ist genau dann ein lineares Gewebe auf M , falls gilt: es gibt eine offene nichtleere Menge U in M , so dass es zu je zwei Punkten $x, y \in U$ eine gewebetreue Abbildung

$$f_{x,y} : W/U \longrightarrow W \text{ mit } f_{x,y}(x) = y \text{ gibt.}$$

b) W ist genau dann ein Gewebe von Typ (I) auf M , falls gilt: es gibt eine offene nichtleere Menge U in M derart, dass es zu jedem $x \in U$ eine nichtleere komplexe Untermannigfaltigkeit N_x in U , $x \in N_x$, $\dim N_x = 1$ (bzw. nichtkonstanter Weg durch x) gibt mit der folgenden Eigenschaft:

zu jedem $y \in N_x$ gibt es eine offene Umgebung $U_y \subset U$ von x sowie eine gewebetreue Abbildung

$$f_{x,y} : W/U_y \longrightarrow W \text{ mit } f_{x,y}(x) = y.$$

c) W ist genau dann ein Gewebe von Typ (II) auf M , falls gilt: es gibt eine offene nichtleere Menge U in M , so dass es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in U$ und jeder offenen Umgebung $U(x)$ in U keine gewebetreue Abbildung

$$f_{x,y} : W/U(x) \longrightarrow W \text{ mit } f_{x,y}(x) = y \text{ gibt.}$$

Zusatz:

Sei W nichtlineares Gewebe, dann ist W genau dann von Typ (I), falls gilt:

es gibt eine offene Menge U in M und zu jedem Punkt x in U eine Schar gewebetreuer Abbildungen

$$f_t : W/U_t \longrightarrow W \text{ für } t \in I_x, I_x \text{ nichtleeres Intervall in } \mathbb{R} \\ \text{und } U_x \text{ offene Umgebung von } x \text{ in } U$$

so dass $\bar{f}_t : I_x \longrightarrow M, t \longmapsto f_t(x)$ nichtkonstanter Weg durch x .

Beweis: Nach 1.9, 2.7 und 2.8 ist jeweils eine Richtung klar.

a) Falls W nichtlinear, so gibt es nichtkonstante Invariante I und es muss gelten $I(x) = I(y)$ für alle $y \in U$, d.h. I/U konstant; dies liefert einen Widerspruch, also ist W linear.

Insbesondere folgt, dass die Bedingungen von b) und c) nur für nichtlineare Gewebe in Frage kommen (falls W linear wäre, könnte man U geeignet einschränken und 1.9 anwenden um einen Widerspruch zu b) bzw. c) zu erhalten).

b) Angenommen, W sei von Typ (II) mit Invarianten I, J .

Dann gibt es offenen nichtleeren Teil V von U mit

$dI \wedge dJ \neq 0$ (dh. o.E. $(I, J)_{/V}: V \longrightarrow (I, J)(V)$ biholomorph!)

Für $x \in V$ gilt dann:

$N_x \cap V$ enthält einen Punkt $y \neq x$ (analoges für den Pfad durch x)

Aus der Gewebetreue von $f_{x,y}$ folgt: $(I, J)(x) = (I, J)(y)$

dies ist ein Widerspruch zur Biholomorphie von $(I, J)_{/V}$

also folgt b)!

c) Angenommen, W von Typ (I) mit einer Invarianten I :

Es gibt dann eine nichtleere Teilmenge V in U , so dass der

Satz 2.8 auf zwei verschiedene Punkte x, y aus U anwendbar ist.

Dies liefert einen Widerspruch und damit die Behauptung b).

Der Zusatz ist klar, da offenbar ein Pfad durch $x \in U$ für die Überlegungen von b) ausreicht.

2.10 Einige Beispiele

1) Die holomorphen Funktionen $z, w, z^2 + z w^2$ induzieren ein nichtlineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$ mit Krümmungsfunktion

$$K(z, w) = 2 (2z + w^2)^{-3} z^{-1} \neq 0$$

Da lokal durch

$$(z, w) \longmapsto (e^{i\varphi} z, e^{i\varphi/2} w) \quad \text{für } \varphi \in [0, 2\pi[$$

gewebetreue Automorphismen erzeugt werden, ist es von Typ (I).

2) Ein ähnliches Beispiel liefern die holomorphen Funktionen

$$z, w, z^2 + z w$$

Das von ihnen erzeugte Gewebe ist nichtlinear, da

$$K(z, w) = 2 (2z + w)^{-3} z^{-1} \neq 0$$

und lokale gewebetreue Automorphismenkeime durch

$$(z, w) \longmapsto (e^{i\varphi} z, e^{i\varphi} w) \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi[$$

gegeben werden können: somit ist es von Typ (I).

3) Auch die Funktionen

$$z, z + w, z + z w$$

liefern ein nichtlineares Gewebe von Typ (I) auf $\mathbb{C}^2$, da

$$(z, w) \longmapsto (-z, z + w + 1)$$

eine lokal gewebetreue Abbildung zum Beispiel 2) vermittelt.

4) Auch die holomorphen Funktionen

$$z, w, z + z w + w^2$$

erzeugen ein nichtlineares Gewebe auf $\mathbb{C}^2$ mit

$$K(z, w) = -2 (w + 1)^{-1} (z + 2w)^{-3} \neq 0$$

das von Typ (I) ist, mit folgenden Invarianten:

$$I_2(z, w) + I(z, w) = 3 \quad (\text{es gibt eine konstante Inv. !})$$

$$I_2(z, w) - \frac{1}{2} I(z, w) = \frac{3}{4} (z - 2) (w + 1)^{-1}$$

ist eine wesentliche Invariantenfunktion, von der alle übrigen Invariantenfunktionen analytisch abhängen.

5) Die holomorphen Funktionen

$$z, w, z + w + a z w^2 \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}^*$$

definieren ein Gewebe von Typ (II) auf $\mathbb{C}^2$, vgl. hierzu IV 3.6.

6) Durch Einschränkung dieser Gewebe auf Gebiete von $\mathbb{C}^2$ erhält man noch weitere Beispiele.

Kapitel III Analytische Polyedergebiete und ihre Gewebe

§1 Der Satz von Remmert-Stein

In diesem Paragraphen werden analytische Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ betrachtet und einige Aussagen über eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen solchen Holomorphiegebieten angeführt. Aus dem Satz von Remmert-Stein geht hervor, dass eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen Polyedergebieten bemerkenswerten Einschränkungen unterworfen sind; diese Abbildungen sind, wie im zweiten Paragraphen noch auszuführen ist, gegenüber den induzierten Zerlegungsgeweben gewebetreu und surjektiv. Zuerst wollen wir hierfür wichtige Begriffe wie Stufe, Minimalsysteme, charakteristische Zerlegungen und Zerlegungsfunktionen definieren. Anschliessend wird noch auf Verallgemeinerungen der Aussage von R. Remmert und K. Stein eingegangen: Diesen Satz hat Eickel in [10] auf analytische Pseudopolyedergebiete und Rischel in [18] auf holomorphe Überlagerungskorrespondenzen ausgedehnt.

1.1 Definition (analytische Polyeder (-Gebiete): [16], S. 183)

a) Unter einem analytischen Polyeder P in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ wird eine kompakte Menge $P \subset \mathbb{C}^m$ mit folgender Eigenschaft verstanden:

Es gibt eine offene Umgebung U von P und endlich viele holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(U)$, so dass gilt:

$$P = \{ x \in \mathbb{C}^m : |f_1(x)| \leq 1, \dots, |f_k(x)| \leq 1 \}$$

b) Ein Polyedergebiet A in $\mathbb{C}^m$ ist eine Zusammenhangskomponente des offenen Kerns $\overset{\circ}{P}$ eines analytischen Polyeders P in $\mathbb{C}^m$ mit der folgenden Eigenschaft:

Die Umgebung U von P und die Funktionen $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(U)$ (von a)) können so gewählt werden, dass für jedes $i=1, \dots, k$ die Menge $\{ x \in U : |f_i(x)| = 1 \} \cap \partial A$ die topologische Dimension $2m-1$ besitzt.

c) Minimalsystem eines Polyedergebiets (vgl. [17], S. 220)

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ und V eine offene Umgebung von der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A .

Ein System $g_1, \dots, g_l \in \Omega^0(V)$ von holomorphen Funktionen heisst ein Minimalsystem für A , wenn gilt:

- 1) für jedes $x \in A$ ist $|g_1(x)| < 1, \dots, |g_l(x)| < 1$.
- 2) zu jedem $x \in \partial A$ gibt es ein $j, 1 \leq j \leq l$ mit $|g_j(x)| = 1$.
- 3) zu jedem $j, 1 \leq j \leq l$ gibt es $x \in \partial A$ mit $|g_j(x)| = 1$ und $|g_p(x)| < 1$ für alle $p, 1 \leq p \leq l$ mit $p \neq j$.

d) Zerlegungsfunktion eines Polyedergebiets ([17], S. 221)

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ und V eine offene Umgebung von $\bar{A}$. Eine nichtkonstante holomorphe Funktion $g \in \Omega^0(V)$ wird Zerlegungsfunktion von A genannt, wenn es eine topologisch $(2m-1)$ -dimensionale Teilmenge von ∂A gibt, wo $|g(x)|$ konstant ist. (Die durch g erzeugte Zerlegung von A in die Zusammenhangskomponenten der Mengen $\{x \in A; g(x) = \text{const.}\}$ nennt man eine charakteristische (einfache) Zerlegung von A).

Jedes Element g_j eines Minimalsystems $g_1, \dots, g_l$ für A ist eine Zerlegungsfunktion. Andererseits gibt es zu jeder Zerlegungsfunktion g von A eine Funktion $g_j(g)$ des Minimalsystems für A , so dass die beiden Funktionen analytisch abhängig sind:

$$dg \wedge dg_j(g) = 0 \text{ auf einer offenen Umgebung von } \bar{A}$$

e) Stufe eines Polyedergebiets ([16], S. 184)

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$.

Die maximale Anzahl verschiedener charakteristischer Zerlegungen von A heisst die Stufe s von A .

s ist eindeutig bestimmt und wird auch als die Maximalzahl von paarweise analytisch unabhängigen Zerlegungsfunktionen von A festgelegt.

f) Zerlegungssystem eines Polyedergebiets (vgl. [10], S. 9)

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ von der Stufe s .

Ein System $f_1, \dots, f_s$ von Funktionen, die auf einer offenen Umgebung von $\bar{A}$ holomorph sind, heisst ein Zerlegungssystem für A , falls gilt:

- 1) $df_i \wedge df_j \neq 0$ auf A für $i \neq j$ (analytische Unabhängigkeit)
- 2) jedes $f_i, i = 1, \dots, s$ ist Zerlegungsfunktion von A
- 3) zu jedem $f_i, i = 1, \dots, s$ gibt es ein $g_{j(i)}$ aus einem Minimalsystem $g_1, \dots, g_s$ für A mit: $df_i \wedge dg_{j(i)} = 0$ auf A .

1.2 Bemerkungen

a) Sei $A \subset \mathbb{C}^m, m \geq 2$ Polyedergebiet der Stufe s . Dann gilt:

1) Es gibt immer ein Zerlegungssystem $f_1, \dots, f_s$ für A mit holomorphen Funktionen in einer Umgebung $U(\bar{A})$ von $\bar{A}$; man kann sie aus dem zu A gehörendem Funktionensystem wählen, s. 1.1 b).

2) Ist $g_1, \dots, g_1$ ein Minimalsystem für A und $f_1, \dots, f_s$ ein Zerlegungssystem für A , so gibt es zu jedem g_1 genau ein f_j mit $dg_1 \wedge df_j = 0$ auf A ; darum gilt: $s \leq 1$.

3) Seien $f_1, \dots, f_s$ und $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$ Zerlegungssysteme für A . Dann gibt es eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_s$ mit

$$df_1 \wedge d\bar{f}_{\tau(1)} = 0 \quad \text{auf } A \text{ für } i = 1, \dots, s.$$

b) Seien $U \subset \mathbb{C}^m, m \geq 2$ und $f_1, \dots, f_r \in \Omega^0(U)$ gegeben mit:

- i) $P := \{x \in U: |f_1(x)| \leq 1, \dots, |f_r(x)| \leq 1\}$ ist kompakt.
- ii) $A_P := \{x \in U: |f_1(x)| < 1, \dots, |f_r(x)| < 1\}$ ist Gebiet.
- iii) $\partial_1 := \{x \in U: |f_1(x)| = 1, |f_j(x)| < 1 \text{ für } j \neq 1\} \neq \emptyset$,
dh. es gibt mindestens einen Punkt $P_1 \in \partial_1, i = 1, \dots, r$.
- iv) Für jedes $i = 1, \dots, r$ verschwindet die Differentialform $df_i \in \Omega^1(U)$ nirgends auf ∂_1 , (bzw. es genügt eine Umgebung $U_1(P_1)$ von P_1 dafür).

Dann ist A_P ein Polyedergebiet.

Beweis: Zu jedem $i = 1, \dots, r$ gibt eine offene Umgebung V_1 von P_1 mit folgenden Eigenschaften:

- $|f_j(y)| < 1$ für alle $y \in V_1$ und alle $j \neq i$ (Stetigkeit!)
- es gibt ein $\mu \in \{1, \dots, m\}$ so dass:

$$df_1 \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge \hat{dz}_\mu \wedge \dots \wedge dz_m \neq 0 \quad \text{auf } V_1$$

- die Abbildung $F_1 := (pr_1, \dots, pr_\mu, \dots, pr_m, f_1)_{V_1}: V_1 \longrightarrow \mathbb{C}^m$ ist biholomorph aufs Bild.

Damit ist klar, dass F_1 das Randstück $V_1 \cap \partial_1$ topologisch auf eine reell $(2m-1)$ -dimensionale Teilmenge von $\mathbb{C}^{m-1} \times S^1$ abbildet. Nach Definition 1.1 a) folgt die Behauptung.

c) Beispiele: (nach [16], S. 184)

Jedes endliche konvexe euklidische Polyeder in $\mathbb{R}^{2m}, m \geq 2$ induziert ein Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m$, sie sind durch

$$\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m: |\exp(a_{k,1}z_1 + \dots + a_{k,m}z_m + b_k)| < 1\} \quad \text{mit}$$

geeigneten $a_{\mu,k}, b_k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, r \geq 2m+1$ beschrieben; s.a. IV §1.

Es soll nun eine Formulierung des Satzes von Remmert-Stein gegeben werden. Die speziellen Randeigenschaften von Polyedergebieten schränken die Klassen von biholomorphen Abbildungen zwischen Polyedergebieten stark ein. (vgl. Rothstein [19] sowie Behnke-Peschl [3]). Remmert und Stein konnten diesen Sachverhalt auf eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen Polyedergebieten ausdehnen. Unter einer eigentlichen stetigen Abbildung $F : X \longrightarrow Y$ eines lokalkompakten Raumes X in einen lokalkompakten Raum Y versteht man eine Abbildung F mit der folgenden Eigenschaft: Ist $K \subset Y$ kompakt, so ist auch $F^{-1}(K)$ kompakt. Eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen (Polyeder-) Gebieten werden auch Überlagerungsabbildungen genannt, da sie surjektiv sind und die Urbildmengen von Punkten aus endlich vielen Punkten bestehen (d.h. nirgends entartet sind). Eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen Polyedergebieten führen die charakteristischen Zerlegungen ineinander über, d.h. auch, die Zerlegungsfunktionen werden einander zugeordnet (und gehen durch Pull-Back auseinander hervor):

1.3 Satz von Remmert-Stein ([16], S. 184 Satz 14; für $m > 2$: Rischel [18])

Es seien A und A' Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$ der Stufe s bzw. s' mit Zerlegungssystemen $f_1, \dots, f_s$ bzw. $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{s'}$. Weiter sei $F : A \longrightarrow A'$ eigentliche holomorphe Abbildung. Dann wird jeder charakteristischen Zerlegung von A genau eine charakteristische Zerlegung von A' in natürlicher Weise zugeordnet, (so dass jedes Element einer charakteristischen Zerlegung von A vermöge F auf ein Element der zugeordneten charakteristischen Zerlegung von A' abgebildet wird), d.h. es gilt:

a) $s = s'$ (" $\geq$ " von Rischel gezeigt: [17], [18])

b) das Funktionensystem $\bar{f}_1 \circ F, \dots, \bar{f}_{s'} \circ F$ ist ein Zerlegungssystem von A , d.h. es gibt eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_s$ mit

$$df_1 \wedge d(\bar{f}_{\tau(1)} \circ F) = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, s \text{ auf } A$$

Dieser Satz soll gewebetheoretisch als Ausgangspunkt für Überlegungen dienen, ob es eigentliche holomorphe Abbildungen zu vorgegebenen Polyedergebieten gibt.

Mithilfe der Zerlegungsfunktionen sollen Gewebe definiert werden, so dass b) die Gewebetreue der Abbildung F bedeutet. (Vgl. §2).

Zunächst soll der Begriff der Stufe etwas verfeinert werden, damit man (später) ausdrücken kann, ob es Gewebe (und wieviele) von Zerlegungen für A gibt.

1.4 Definition (Stufentupel)

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ der Stufe s mit einem Zerlegungssystem $f_1, \dots, f_s$ mit $s > m$.

Dann gibt es nichtnegative ganze Zahlen $s_2, \dots, s_m, w_1, \dots, w_{s-m}$ die in folgender Weise definiert seien:

$s_\mu :=$ Anzahl von Tupeln $(i_1, \dots, i_\mu)$
mit $0 < i_1 < \dots < i_\mu \leq s$, so dass

$df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_\mu} \neq 0$ auf A

für $\mu = 2, \dots, m$ (offensichtlich ist $s_2 = \binom{s}{2}$).

$w_j :=$ Anzahl von Tupeln $(i_1, \dots, i_{j+m})$
mit $0 < i_1 < \dots < i_{j+m} \leq s$, so dass

$df_{i_{\tau(1)}} \wedge \dots \wedge df_{i_{\tau(m)}} \neq 0$ auf A für alle $\tau \in \mathfrak{S}_{m+j}$

für $j = 1, \dots, s-m$.

Damit ist

$\sigma(A) := (s_2, \dots, s_m, w_1, \dots, w_{s-m})$ wohldefiniert.

Man kann leicht zeigen, dass $\sigma(A)$ unabhängig von der Wahl des zugrunde gelegten Zerlegungssystems ist.

Aus dem Satz von Remmert-Stein 1.3 folgt, dass $\sigma(A)$ eine Invariante von Polyedergebieten gegenüber eigentlichen holomorphen Abbildungen ist. Denn es gilt:

1.5 Lemma (Invariante $\sigma(A)$) für Polyedergebiete A)

Seien A und A' Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ der Stufe $s > m$.

und $F : A \longrightarrow A'$ eigentliche holomorphe Abbildung.

Dann gilt immer:

$\sigma(A) = \sigma(A')$

Beweis: Seien $f_1, \dots, f_s$ bzw. $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$ Zerlegungssysteme für A bzw. A' . Dann folgt aus 1.3:

$\bar{f}_1 \circ F, \dots, \bar{f}_s \circ F$ definiert ein Zerlegungssystem für A .

o.E. seien die $\bar{f}_i$ so geordnet, dass gilt: $df_1 \wedge d(\bar{f}_1 \circ F) = 0$

Nach o.8 gibt es offenes $U \subset A$ und $g_1 \in \mathcal{Q}^0(f_1(U))$ mit

$\bar{f}_1 \circ F = g_1 \circ f_1$ auf U und für $i = 1, \dots, s$. Es folgt noch:

$$d(\bar{f}_1 \circ F) = g_1'(f_1) df_1 \quad \text{mit} \quad 0 \neq g_1' := \frac{d}{dz} g_1 \in \mathcal{Q}^0(f_1(U))$$

Sei nun $V \subset U$, derart, dass $F|_V$ biholomorph aufs Bild.

Dann folgt offenbar durch Pull-Back o.3:

$$s_\mu = s_\mu' \quad \text{für } \mu = 2, \dots, m \quad \text{und}$$

$$w_j = w_j' \quad \text{für } j = 1, \dots, s-m \quad (\text{also die Behauptung}).$$

(Die Unabhängigkeit vom gewählten Zerlegungssystem geht analog!)

Nach Eickel[10] kann die Aussage von Satz 1.3 auf sogenannte Pseudopolyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ verallgemeinert werden.

1.6 Definition (pseudoanalytisches Polyedergebiet [10], S.10)

Ein beschränktes Gebiet A in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ heisst pseudoanalytisches Polyedergebiet, falls es eine offene Umgebung $U(\bar{A})$ gibt, in der A kompakt enthalten ist, und endlich viele holomorphe Funktionen $h_1, \dots, h_r \in \mathcal{Q}^0(U(\bar{A}))$ sowie $l_1, \dots, l_k \in \mathcal{Q}^0(U(\bar{A}))$ existieren, so dass gilt:

1) auf dem Rand ∂A von A liegen r topologisch $(2m-1)$ -dimensionale Hyperflächenstücke H_ρ mit einer 'Normaldarstellung':

$H_\rho := \{x \in \partial A : h_\rho(x) = \gamma_\rho(t)\}$ wobei durch $z = \gamma_\rho(t)$ ein stetig differenzierbares Kurvenstück in der komplexen Ebene für jedes $\rho = 1, \dots, r$ beschrieben wird.

2) alle übrigen Randpunkte von A liegen auf endlich vielen in U stetig differenzierbaren Hyperflächenstücken

$$\tilde{H}_\eta := \{(y_1, \dots, y_{2m}) \in U(\bar{A}) : \tilde{h}_\eta(y_1, \dots, y_{2m}) = 0\} \cap \partial A$$

mit stetig differenzierbaren (reellen) Funktionen auf $U(\bar{A})$

$\tilde{h}_\eta : U(A) \longrightarrow \mathbb{R}, \eta = 1, \dots, n$; auf welchen nur die endlich vielen komplex-analytischen 1-codimensionalen Flächen

$F_\lambda := \{x \in U(\bar{A}) : l_\lambda(x) = 0\} \cap \partial A, \lambda = 1, \dots, k$ liegen.

Mit den analogen Begriffen charakteristische Zerlegung, Stufe und Zerlegungsfunktionen für pseudoanalytische Polyedergebiete gilt dann ein ähnlicher Satz wie 1.3:

1.7 Satz (Eickel[10], S.21 Satz 5)

Es seien A und A' pseudoanalytische Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ der Stufe s bzw. s' . Weiter sei $F: A \longrightarrow A'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von A in A' . Dann gilt:

1) Jeder charakteristischen Zerlegung von A ist in natürlicher Weise genau eine charakteristische Zerlegung von A' zugeordnet, (so dass jedes Element einer charakteristischen Zerlegung vermöge F auf ein Element der zugeordneten charakteristischen Zerlegung abgebildet wird)

2) Für die Stufen gilt: $s \leq s'$; falls F biholomorph ist $s = s'$.

3) Ist $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_s$ ein Zerlegungssystem für A' , so enthält das Funktionensystem $\tilde{F}_1 \circ F, \dots, \tilde{F}_s \circ F$ auf A ein Zerlegungssystem für A .

Aus diesem Satz folgt (wie später noch erklärt wird), dass eigentliche holomorphe Abbildungen notwendigerweise gewebe-treue Abbildungen zwischen den Zerlegungsgeweben von A und einigen Zerlegungsgeweben von A' definieren müssen.

1.8 Beispiel

Behnke-Peschl gaben 1936 in [3] u. a. folgende starre Holomorphiegebiete an:

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |z - \varepsilon| + |w - \eta| < 2\}$$

wobei $\varepsilon, \eta \in \mathbb{C}$ mit $0 < 2 - |\eta| < |\varepsilon| < \sqrt{2} - 1$

Dies sind insbesondere pseudoanalytische Polyedergebiete in $\mathbb{C}^2$, der Stufe 2, die mit den in dieser Arbeit entwickelten Methoden allerdings nicht behandelt werden, aber jedoch leicht mit Hilfe von Sätzen aus [16] (speziell Satz 13, S.182) angegangen werden können.

Die wesentliche Idee von Eickel besteht darin, die starren Simplexgebiete der Stufe 3 (aus [16]) ähnlich wie in dem Beispiel mit Hyperkugeln zu schneiden, (so dass die Stufe gleich bleibt), und dann die Kanten mit einem Glättungsprozess so zu behandeln, derart, dass schliesslich ein Gebiet mit glattem Rand entsteht, [10].

Ohne allzusehr auf alle Details einzugehen, (hierin vgl. [18] und die dort angegebene Literatur), sei bloss, um die von Rischel vorgeschlagenen Verallgemeinerungen zum Satz von Remmert-Stein zu beleuchten, nur folgendes erwähnt:

Rischel betrachtet irreduzible holomorphe Überlagerungskorrespondenzen $F : A \longrightarrow B$ zwischen Gebieten $A, B \subset \mathbb{C}^m, m \geq 2$, dh. F, F^{-1} sollen holomorphe, surjektive, offene und nirgends entartete Korrespondenzen sein, deren Graph $\Gamma(F) \subset A \times B \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$ eine irreduzible analytische Menge ist.

Dann kann Rischel den folgenden Satz beweisen:

1.9 Satz (Satz 2 in [18], S.56)

Seien $A_1 \subset \mathbb{C}_z^m = (z_1, \dots, z_m)$ und $A_2 \subset \mathbb{C}_w^m = (w_1, \dots, w_m), m \geq 2$ analytische Polyedergebiete der Stufe s_1 bzw. s_2 sowie $F : A_1 \longrightarrow A_2$ eine irreduzible holomorphe Überlagerungskorrespondenz.

Dann induziert F eine bijektive (dh. $s_1 = s_2$!) Zuordnung zwischen den charakteristischen Zerlegungen von A_1 und A_2 derart, dass die Abbildungen $f \circ \text{pr}_z : \Gamma(F) \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g \circ \text{pr}_w : \Gamma(F) \longrightarrow \mathbb{C}$ im engeren Sinne verwandt sind, wenn f und g Zerlegungsfunktionen auf A_1 und A_2 für zugeordnete charakteristische Zerlegungen sind.

1.10 Abschliessende Bemerkung.

Im nächsten Paragraphen werden den Polyedergebieten mit ausreichend vielen geeigneten Zerlegungsfunktionen "Zerlegungsgewebe" zugeordnet, so dass eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen solchen Polyedergebieten insbesondere gewebetreu sind.

In Zusammenhang mit den eben zitierten Resultaten von Rischel sei eine Anwendungsmöglichkeit der Aussagen II 1.9, 2.5 - 8 über Existenz lokaler gewebetreuer Abbildungen angedeutet: Wendet man diese auf die Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten gleichen Typs (vgl. hierzu 2.9 T(.) sowie $\sigma(\cdot)$ von 1.5) an, so müsste man versuchen mit Hilfe naheliegender Eindeutigkeitsaussagen die Graphen der lokalen gewebetreuen Abbildungen in $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$ zusammenzusetzen, (mit Identitätssatz sowie Zornschem Lemma). Unter den maximalen Fortsetzungen müssen notwendigerweise (sofern existent) die Überlagerungskorrespondenzen bzw. die Graphen eigentlicher holomorpher Abbildungen zu finden sein.

§2 Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$.

In diesem Paragraphen werden die Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten mit geeigneten Zerlegungssystemen definiert und ihre expliziten Formeln berechnet. Der Satz von Remmert-Stein wird zum gewebetheoretischen Hauptsatz der Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten unter eigentlichen holomorphen Abbildungen umformuliert. Es wird dargelegt, warum zwischen den 2-dimensionalen und dem höherdimensionalen Polyedergebieten in Bezug auf gewebetheoretische Anwendungen unterschieden wird. Schliesslich wird gezeigt, dass 2-dimensionale permutierte Gewebe in einem gewissen Sinn äquivalent sind.

2.1 Lemma und Definition

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ der Stufe $s > m$

mit $\sigma(A) = (s_2, s_3, \dots, s_m, w_1, \dots, w_{s-m})$.

Sei $f_1, \dots, f_s$ ein Zerlegungssystem für A . Dann gilt:

a) Es gibt genau $k := (m+1)! w_1$ "Zerlegungsgewebe" $\bar{w}_{i_1, \dots, i_{m+1}}^\tau$ auf A , die in folgender Weise definiert werden:

Seien $0 < i_1 < \dots < i_{m+1} \leq s$ natürliche Zahlen (gemäss 1.4)

$\bar{h}_{i_1 \mu}$ die Funktionaldeterminante der holomorphen Abbildung

$$H_{i_1 \mu} := (f_{i_1}, \dots, \hat{f}_{i_\mu}, \dots, f_{i_{m+1}}): A \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

sowie $\tau \in \mathfrak{S}_{m+1}$ eine Permutation, so dass mit $h_{i_1 \mu} := (-1)^{m-1+1} \bar{h}_{i_1 \mu}$

$$\bar{w}_{i_1, \dots, i_{m+1}}^\tau := (A, h_{i_{1\tau}(1)} \frac{df_{i_{1\tau}(1)}}{df_{i_{1\tau}(1)}}, \dots, h_{i_{\tau(m+1)}} \frac{df_{i_{\tau(m+1)}}}{df_{i_{\tau(m+1)}}})$$

ein meromorphes Gewebe auf A (im Sinne von I.1.1) definiert.

b) Sei $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$ ein weiteres Zerlegungssystem für A .

Dann gibt es eine Permutation $\mathfrak{v} \in \mathfrak{S}_s$, so dass alle Zerlegungsgewebe $\bar{w}_{j_1, \dots, j_{m+1}}^\tau$ bzgl. $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$ (die man entsprechend a) definieren kann) noch folgende Eigenschaft haben:

Ist $\bar{w}_{i_1, \dots, i_{m+1}}^\tau$ Zerlegungsgewebe von A bzgl. $f_1, \dots, f_s$, so ist

$\bar{w}_{\mathfrak{v}(i_1), \dots, \mathfrak{v}(i_{m+1})}^\tau$ Zerlegungsgewebe von A bzgl. $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$ und

beide Gewebe sind ähnliche Gewebe auf A (im Sinne von I.2.6).

Beweis: Die Bedingung $s > m$ ist eine technische Anforderung, da für $s = m$ kein Gewebe definiert werden kann. Darum werden im Folgenden nie Polyedergebiete mit $s = m$ betrachtet, Solche Gebiete werden übrigens Bishop'sche Polyedergebiete genannt. Die Bedingung $w_1 \neq 0$ ist ebenfalls wesentlich (wie später noch mit Gegenbeispielen erläutert werden soll!), sie sichert genau die Existenz von Geweben, die von Zerlegungsfunktionen induziert werden:

Sei also $0 < i_1 < \dots < i_{m+1} \leq s$ mit der Eigenschaft in 1.4:

Dann folgt für die Gleichung

$$\lambda_1 df_{i_1} + \dots + \lambda_m df_{i_m} = - df_{i_{m+1}} \quad \text{auf } A$$

in den unbekannten Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ aus der Cramer'schen Regel insbesondere: (für $\mu = 1, \dots, m$)

$$\lambda_\mu = h_{i_\mu} (h_{i_{m+1}})^{-1} \quad \text{mit nicht identisch verschwindenden } h_{i_\mu} \\ (\text{genau dies bedeutet 1.4!!})$$

Offensichtlich müssen also die Tupel $(i_1, \dots, i_{m+1})$, welche w_1 in 1.4 definieren, ein meromorphes Gewebe liefern:

$$\text{mit } \gamma_{i_\mu} := d(\lg h_{i_\mu}) = (h_{i_\mu})^{-1} dh_{i_\mu} \quad \text{folgt nämlich:}$$

$$d(h_{i_\mu} df_{i_\mu}) = (h_{i_\mu} df_{i_\mu}) \wedge \gamma_{i_\mu} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, m+1$$

und somit sind alle Bedingungen von I.1.1 erfüllbar. Weitere Gewebe von Zerlegungsfunktionen sind offenbar nicht definierbar, wenn man von den permutierten Geweben absieht (die sowieso einbezogen wurden).

Sei $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_s$ ein weiteres Zerlegungssystem für A , so gibt es nach Bemerkung 1.2 a) eine Permutation $j \in \mathfrak{S}_s$, so dass

$$df_1 \wedge d\tilde{F}_{j(1)} = 0 \quad \text{auf } A \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

Dies liefert (insbesondere wegen 0.9) sofort die Aussage b).

2.2 Gegenbeispiel

Für $m > 2$ gibt es Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m$ der Stufe $s > m$ mit $w_1 = 0$, die also nach 2.1 a) keine Zerlegungsgewebe haben.

$A := \{(z, w, u) \in \mathbb{C}^3 : |z| < 1, |w| < 1, |u| < 1, |z + w| < 1, |w + u| < 1\}$ ist offenbar ein Polyedergebiet der Stufe 5 in $\mathbb{C}^3$ mit $w_1 = 0$.

2.3 Hauptsatz (Zerlegungsgewebe unter eigentlichen Abbildungen)

Seien A und A' Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ der Stufe $s > m$,
 $w_1 = w'_1 > 0$ sowie Zerlegungssystemen $f_1, \dots, f_s$ bzw. $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$.
 Weiter sei $F : A \longrightarrow A'$ eigentliche holomorphe Abbildung
 von A in A' . Dann gilt:

A und A' haben genau $(m+1)! w_1$ Zerlegungsgewebe $w_{1_1, \dots, 1_{m+1}}^\tau$
 bzgl. $f_1, \dots, f_s$ bzw. $\bar{w}_{j_1, \dots, j_{m+1}}^\tau$ bzgl. $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_s$ und
 es gibt eine Permutation $\psi \in \mathfrak{S}_s$, so dass die Gewebe (auf A)
 $w_{1_1, \dots, 1_{m+1}}^\tau$ (bzgl. $f_1, \dots, f_s$) und $F^*(\bar{w}_{\psi(1_1), \dots, \psi(1_{m+1})}^\tau)$
 (bzgl. $\bar{f}_1 \circ F, \dots, \bar{f}_s \circ F$) ähnlich sind.

Dies ist offenbar eine Umformulierung der Satzes von Remmert-
 Stein 1.3: $f_1, \dots, f_s$ und $\bar{f}_1 \circ F, \dots, \bar{f}_s \circ F$ sind zwei Zerlegungs-
 systeme für A , auf die man folglich Lemma 2.1 anwenden kann.

2.4 Bemerkungen

a) Im Fall $m = 2$ ist die Bedingung $w_1 = w'_1$ überflüssig, da
 dann immer $w_1 = \binom{s}{3} > 0$ gilt.
 Es gibt dann immer Zerlegungsgewebe auf A , von denen genau
 w_1 wesentlich sind.

b) Im Fall $m > 2$ gibt es i.a. kein Zerlegungsgewebe, wie aus
 dem Beispiel von 2.2 ersichtlich ist, (man kann leicht wei-
 tere ähnlich gelagerte Beispiele angeben). Eine detailliertere
 Analyse müsste auf nähere Untersuchungen der Grössen $s_3, \dots, s_m$
 in der Invarianten $\sigma(A) = (s_2, s_3, \dots, s_m, w_1, \dots, w_{s-m})$ hinauslau-
 fen und auf das Verhalten von induzierten 'Schnitt'-Gewebe
 auf niederdimensionalen Hyperflächen (die unter eigentlichen
 Abbildungen F zugeordnet sein sollten) eingehen, doch ist mir
 darüber nichts bekannt.

Die anderen Zahlen $w_2, \dots, w_{s-m}$ geben darüber Auskunft, wieviele
 $(m+j)$ -Gewebe auf A (in einem naheliegendem Sinn) definierbar wä-
 ren ($j = 2, \dots, s-m$). Diese Strukturen sind wesentlich stärker
 als die des $(m+1)$ -Gewebes (die dieser Arbeit zugrundegelegt ist)
 und würde schliesslich erzwingen, dass das Gesamtgewebe $f_1, \dots, f_s$
 (bei genügend hohem s) linearisierbar wäre, (vgl. [9] bei IR-webs).

In dieser Arbeit sollen jedoch mithilfe der Gewebetheorie Aussagen erarbeitet werden, die mit geringen Anforderungen an die (Anzahl der) Zerlegungsfunktionen von Polyedergebieten auskommen. Es ist klar, dass es i. a. zwischen analytischen Polyedergebieten mit vielen wesentlich verschiedenen Zerlegungsfunktionen wenig eigentliche holomorphe Abbildungen geben kann.

c) Ein weiterer Aspekt des Unterschieds zwischen $m = 2$ und $m > 2$ liegt in der Asymmetrie der Definition des $(m+1)$ -Gewebes für $m > 2$, (vgl. I 1.3): Eine der, das Gewebe definierenden, Pfaffschen Formen ist gegenüber den andern ausgezeichnet.

Es liegt nahe, die Anzahl der induzierten Zerlegungsgewebe auf A durch Identifikation der permutierten Gewebe $W_{i_1, \dots, i_{m+1}}^\tau$ mit $\tau \in \mathfrak{S}_{m+1}$ in vernünftiger Weise zu verringern.

Bei $m > 2$ könnte man dies bestenfalls mit $\tau \in \mathfrak{S}_m$, die die ausgezeichnete Gewebeform fest lässt, oder mit komplizierten Konstruktionen, die Gewebe mit den gleichen Indizes 'mischen'.

Bei den 3-Geweben auf Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ kann man die Beziehungen zwischen permutierten Geweben und ihren Halbinvarianten bzw. Invarianten eher übersehen.

2.5 Lemma

Sei M komplexe 2-dimensionale offene Mannigfaltigkeit mit einem meromorphen nicht linearen Gewebe $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ und den lokalen Geweben $W_a = (U_a, \omega_1^a, \omega_2^a, \omega_3^a, \gamma^a)$.

Weiter sei $\tau \in \mathfrak{S}_3$ eine feste Permutation. Dann gilt:

a) das permutierte Gewebe $W^\tau = (U_a, W_a^\tau)_{a \in A}$ mit den lokalen Geweben $W_a^\tau := (U_a, \omega_{\tau(1)}^a, \omega_{\tau(2)}^a, \omega_{\tau(3)}^a, \gamma^a)$ ist wohldefiniert.

b) für die Halbinvariantensysteme $\mathfrak{K}_{W_a}$ und $\mathfrak{K}_{W_a}^\tau$ gilt:

$(K^a)^\tau = (-1)^{s(\tau)} K^a$ wobei $s(\tau) := \text{Signum von } \tau$

$(K_j^a)^\tau = K_{\tau(j)}^a$ für $j = 1, 2, 3$

$(K_{ij}^a)^\tau = (-1)^{s(\tau)} K_{\tau(i)\tau(j)}^a$ für $i, j = 1, 2, 3$

$(K_{I_s}^a)^\tau = (-1)^{s(\tau)(s+1)} K_{\tau(I_s)}^a$ für Gewichte $s = 1, 2, \dots$

und naheliegend definiertem $\tau(I_s)$

Die Konsequenzen für die niedrigsten Invarianten siehe Tabelle:

2.6 Tabelle zum Umrechnen der Invarianten bei Permutationen

$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$
I_1	$-I_1$	$I_1 + I_2 + 2I$	$-I_1 - I_2 - 2I$	I_2	$-I_2$
I_2	$-I_1 - I_2 - 2I$	I_1	$-I_2$	$I_1 + I_2 + 2I$	$-I_1$
I	$I_1 + I$	$-I_1 - I$	$I_2 + I$	$-I_2 - I$	$-I$
$I_1 + aI$	$(a-1)I_1 + aI$	$(a-1)I_1 + I_2 + (2-a)I$	$(a-1)I_2 - I_1 + (a-2)I$	$(a-1)I_2 - aI$	$-I_2 - aI$
$I_2 + aI$	$(a-1)I_1 - I_2 + (a-2)I$	$(1-a)I_1 - aI$	$(a-1)I_2 + aI$	$I_1 + (1-a)I_2 + (2-a)I$	$-I_1 - aI$
$I_1 + aI_2$	$-(1+a)I_1 - aI_2 - 2aI$	$(1+a)I_1 + I_2 + 2I$	$-I_1 - (1+a)I_2 - 2I$	$I_1 + (a+1)I_2 + 2aI$	$-I_2 - 2aI_1$
J_{11}	$-J_{11}$	$J_{11} + J_{12} + J_{21} + J_{22}$	$-J_{11} - J_{12} - J_{21} - J_{22}$	J_{22}	$-J_{22}$
J_{12}	$J_{11} + J_{12}$	$-J_{11} - J_{21}$	$J_{12} + J_{22}$	$-J_{21} - J_{22}$	$-J_{21}$
J_{21}	$J_{11} + J_{21}$	$-J_{11} - J_{12}$	$J_{21} + J_{22}$	$-J_{12} - J_{22}$	$-J_{12}$
J_{22}	$-J_{11} - J_{12} - J_{21} - J_{22}$	J_{11}	$-J_{22}$	$J_{11} + J_{12} + J_{21} + J_{22}$	$-J_{11}$

wobei $I_1 := K_1^2 K^{-3}$ $I_2 := K_2^2 K^{-3}$ $I := K_1 K_2 K^{-3}$ und $a \in \mathbb{Q}$

$J_{11} := K_1 K^{-2}$ $J_{12} := K_1 K_2 K^{-2}$ $J_{21} := K_2 K^{-2}$ $J_{22} := K_2^2 K^{-2}$

Beweis: Man kann leicht zeigen, dass $(\gamma^a)^\tau = \gamma^a$ sein muss.

Damit folgt dann sofort:

$$\begin{aligned} K^a \omega_1^a \wedge \omega_2^a &= d\gamma^a = d(\gamma^a)^\tau = (K^a)^\tau \omega_{\tau(1)}^a \wedge \omega_{\tau(2)}^a \\ &= (-1)^{s(\tau)} (K^a)^\tau \omega_1^a \wedge \omega_2^a \end{aligned}$$

wegen $\omega_1^a + \omega_2^a + \omega_3^a = 0$.

$$\begin{aligned} (K_2^a)^\tau \omega_{\tau(1)}^a - (K_1^a)^\tau \omega_{\tau(2)}^a &= d(K^a)^\tau - 2(K^a)^\tau (\gamma^a)^\tau \\ &= (-1)^{s(\tau)} (dK^a - 2K^a \gamma^a) \\ &= (-1)^{s(\tau)} (K_2^a \omega_1^a - K_1^a \omega_2^a) \\ &= (-1)^{s(\tau)} (-1)^{s(\tau)} (K_{\tau(2)}^a \omega_{\tau(1)}^a - K_{\tau(1)}^a \omega_{\tau(2)}^a) \end{aligned}$$

In analoger Weise kann man $(K_{\tau(s)}^a)^\tau$ nachrechnen, für $s = 1, 2, \dots$

Die Tabelle 2.6 kann man dann mittels $K_1^a + K_2^a + K_3^a = 0$, etc. und den Regeln von I.1.7 ausrechnen.

2.7 Bemerkungen (Symmetrisierung permutierter Gewebe)

a) Beispiele

Sei $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ nicht lineares Gewebe auf einer komplexen 2-dimensionale offenen Mannigfaltigkeit M mit den Halbinvariantensystemen $\mathfrak{G}_{W_a}$ der lokalen Gewebe W_a .

Dann sind auch die permutierten Gewebe W^τ , $\tau \in \mathfrak{S}_3$ wohldefiniert und besitzen lokale Halbinvariantensysteme $\mathfrak{G}_{W^\tau}$.

Seien $I_1 := K_1^2 K^{-3}$, $I_2 := K_2^2 K^{-3}$, $I := K_1 K_2 K^{-3}$ die (schon öfters benutzten) wohldefinierten ersten Invarianten, sowie $I_1^\tau, I_2^\tau, I^\tau$ die entsprechenden Invarianten des permutierten Gewebe W^τ .

$$L_1 := I^2(I_1 + I_2 + 2I)$$

$$L_2 := (I_1 + I_2 + I)^2 \quad \text{sind Invarianten von } W \text{ und es gilt:}$$

$$L_1 = I_1^\tau \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und alle } \tau \in \mathfrak{S}_3.$$

Dh. L_1 und L_2 sind Invarianten der permutierten Gewebe $(W^\tau, \tau \in \mathfrak{S}_3)$ und unabhängig von einem konkret gewählten $\tau \in \mathfrak{S}_3$.

Das zugrunde-gelegte Verfahren geht von symmetrischen Halbinvarianten (vermöge gewisser symmetrischer Polynome) aus, welche in der üblichen Weise Invarianten liefern, die allerdings aus Vorzeichengründen noch quadriert werden sollten.

Mithilfe der symmetrischen Polynome

$$P_0(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + x_3$$

$$P_1(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

$$P_2(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 x_3$$

kann man induktiv (wie in I.1.4) lokale Halbinvariantensysteme definieren, die bei Übergang zu anderen permutierten Geweben W^τ (bis auf $(-1)^{s(\tau)}$) invariant bleiben:

$$\tilde{K}_1^a := P_1(K_1^a, K_2^a, K_3^a) \quad \text{für } i = 0, 1, 2 \text{ genügt (nach 2.5):}$$

$$(\tilde{K}_1^a)^\tau = \tilde{K}_1^a = (-1)^{s(\tau)(i+1)} \tilde{K}_1^a \quad \text{für } i = 0, 1, 2 \text{ und } \tau \in \mathfrak{S}_3$$

$\tilde{K}_0^a = 0$ immer; und $\tilde{K}_1^a$ (bzw. $\tilde{K}_2^a$) ist Halbinvariante von Gewicht 6 (bzw. 9).

Ist $\tilde{K}_{I_r}^a$ eine symmetrische Halbinvariante von Gewicht s_r , so erhält man weitere symmetrische Halbinvarianten wie folgt:

$$d(\tilde{K}_{I_r}^a) - s_r \tilde{K}_{I_r}^a \gamma^a = \hat{K}_{I_r 2}^a \omega_1^a - \hat{K}_{I_r 1}^a \omega_2^a = \hat{K}_{I_r 1}^a \omega_3^a - \hat{K}_{I_r 3}^a \omega_1^a$$

$$\tilde{K}_{I_r 1}^a := P_1(\hat{K}_{I_r 1}^a, \hat{K}_{I_r 2}^a, \hat{K}_{I_r 3}^a) \quad \text{für } i = 0, 1, 2$$

Es ist wieder $\tilde{K}_{I_r 0}^a = 0$ und $\tilde{K}_{I_r 1}^a$ (bzw. $\tilde{K}_{I_r 2}^a$) ist symmetrische Halbinvariante von Gewicht $2(s_r + 1)$ (bzw. $3(s_r + 1)$), die bis auf das Vorzeichen unabhängig von $\tau \in \mathfrak{S}_3$ ist.

Insgesamt erhält man ein System $\tilde{\mathfrak{H}}_{W_a} = (\tilde{K}_{I_r}^a, I_r \in \{1, 2\}, r \in \mathbb{N}_0)$ von symmetrischen Halbinvarianten, die bis auf Vorzeichen gegenüber Permutation des Gewebes $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ invariant sind. Hieraus folgt:

Ist $\tilde{K}_{I_r}^a$ eine symmetrische (lokale) Halbinvariante von Gewicht s_r , so wird durch

$$\tilde{J}_{I_r}^a := ((\tilde{K}_{I_r}^a)^2 (\tilde{K}^a)^{-2-s_r})^2 \quad \text{eine lokale symmetrische Invariante}$$

definiert, die sich gegenüber Permutationen $\tau \in \mathfrak{S}_3$ so verhält:

$$(\tilde{J}_{I_r}^a)^\tau = \tilde{J}_{I_r}^a$$

Analog I.2.8 lässt sich $\tilde{J}_{I_r}^a$ als globale Invariante von $(W^\tau, \tau \in \mathfrak{S}_3)$ erklären.

Die oben erwähnten Invarianten L_1, L_2 sind die niedrigsten.

Offenbar liefert die eben skizzierte Methode zur Konstruktion von symmetrisierten Invarianten der Gewebe $(W^{\tau}, \tau \in \mathfrak{S}_3)$ recht komplizierte Ausdrücke.

In praktischen Fällen ist es besser, mit der Tabelle 2.6 zu arbeiten und immer die 6 Alternativen zu vergleichen. Bei dem Symmetrisierungsverfahren gehen manchmal so nützliche Eigenschaften wie Konstanz einer Invarianten von W oder Beschränktheit (und Form) der Bildmenge einer Invarianten von einem speziellen W^{τ_0} leicht unter. (Vgl. Beispiele im nächsten Kapitel).

In etwas abgewandelter Form sind auch symmetrische Invarianten von höherdimensionalen Geweben definierbar (bzgl. der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_{m,m} > 2$), dadurch ist die Zahl der wesentlichen Zerlegungsgewebe auf Polyedergebieten in $\mathbb{C}^m, m > 2$ von $w_1(m+1)!$ auf $w_1(m+1)$ reduzierbar, (sofern $w_1 > 0$).

b) Bei linearen Geweben $W = (U_a, W_a)_{a \in A}$ folgt für permutierte Gewebe W^{τ} mit $\tau \in \mathfrak{S}_{m+1}$ offenbar:

Ist $(v_b, L_1^b, \dots, L_{m+1}^b)_{b \in B}$ eine Linearisierung von W , so ist

$(v_b, L_{\tau(1)}^b, \dots, L_{\tau(m+1)}^b)_{b \in B}$ eine Linearisierung von W^{τ} .

Hier machen also die permutierten Gewebe keine Schwierigkeiten.

c) Schliesslich haben Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten noch den Vorteil, dass die zugrundegelegte Überdeckung immer aus einem Element (dem Polyedergebiet selbst) besteht, so dass alle Aussagen einfacher und konkreter werden.

2.8 Lemma und Definition (Wesentliche Systeme von Zerlegungsgeweben)

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^2$ der Stufe $s > 2$.

Dann gibt es genau $\binom{s}{3} =: k$ meromorphe Zerlegungsgewebe $W_1, \dots, W_k$ auf A , so dass gilt:

a) Je zwei verschiedene W_i und W_j gehen nicht vermöge einer Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_3$ auseinander hervor:

dh. W_i und W_j^{τ} sind für alle $j \neq i, j = 1, \dots, k, \tau \in \mathfrak{S}_3$ nicht ähnliche Gewebe.

$(W_1, \dots, W_k)$ heisst wesentliches System von Zerlegungsgeweben auf dem analytischen Polyedergebiet A .

b) Sei $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ ein anderes System von Zerlegungsgeweben von A, die a) genügen. Dann gibt es eine Permutation $\vartheta \in \mathfrak{S}_k$, sowie weitere Permutationen $\tau^1, \dots, \tau^k \in \mathfrak{S}_3$, so dass gilt:

w_1 und $\bar{w}_{\vartheta(1)}^{\tau^1}$ sind für alle $i = 1, \dots, k$ ähnliche Gewebe auf A.

Beweis: Sei $f_1, \dots, f_s$ ein Zerlegungssystem für A.

Dann gibt es nach Lemma 2.1 $\left(\frac{s}{3}\right)$ 3! Zerlegungsgewebe

$w_{i_1 i_2 i_3}^{\tau}$ bzgl. $f_1, \dots, f_s$ auf A, wobei τ ganz $\mathfrak{S}_3$ durchläuft

und die Indizes $0 < i_1 < i_2 < i_3 \leq s$ gemäss Definition 1.4

für w_1 charakterisiert sind, hier also alle zulässig sind!

Man wähle zu jedem solchen Tripel (i_1, i_2, i_3) eine Permutation

aus $\mathfrak{S}_3$; die dadurch festgelegten Zerlegungsgewebe definieren

ein wesentliches System $(w_1, \dots, w_k)$ von Zerlegungsgeweben, $k = \left(\frac{s}{3}\right)$.

Die Eigenschaft b) folgt aus Lemma 2.1 b) und der eben er-

läuterten (bis auf Permutationen $\tau^i \in \mathfrak{S}_3$ eindeutigen) Fest-

setzung von wesentlichen Zerlegungsgeweben zu einem vorgege-

benen Zerlegungssystem für A.

Analog kann man wesentliche Systeme von Zerlegungsgeweben für

Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m$, $m > 2$ einführen (wenn man $\mathfrak{S}_3$ durch $\mathfrak{S}_m$

ersetzt); die gegebene Argumentation ist wörtlich analog und

man erhält genau $w_1(m+1)$ wesentliche Zerlegungsgewebe.

Wie in 2.4 a) erwähnt, liefert im 2-dimensionalen Fall die

Invariante $\sigma(A)$ für Polyedergebiete A keinerlei Information,

die über den Begriff 'Stufe von A' hinaus geht, (im Gegensatz zum höherdimensionalen Fall).

Aber mithilfe der Begriffe Typ (I) bzw. Typ (II) von Kapitel II

lässt sich eine Ersatzinvariante $T(A)$ für Polyedergebiete in

$\mathbb{C}^2$ der Stufe $s > 2$ gegenüber eigentlichen holomorphen Abbildun-

gen zwischen Polyedergebieten einführen:

2.9 Definition

Sei $A \subset \mathbb{C}^2$ analytisches Polyedergebiet der Stufe $s > 2$ mit

einem wesentlichem System $(w_1, \dots, w_k)$ von Zerlegungsgeweben.

s_0 := Zahl der linearen Gewebe unter den $w_1, \dots, w_k$.

s_I := Zahl der Gewebe von Typ (I) unter den $w_1, \dots, w_k$.

s_{II} := Zahl der Gewebe von Typ (II) unter den $w_1, \dots, w_k$

$T(A) := (s, s_I, s_{II})$ heisse Typ von A.

Wegen 2.8 b) ist $T(A)$ unabhängig von der Auswahl der wesentlichen Zerlegungsgewebe. Ausserdem gilt:

$$s_0 + s_I + s_{II} = \binom{s}{3} \quad (\text{Deshalb geht } s_0 \text{ nicht in } T(A) \text{ ein!})$$

Wir fassen das Verhalten von $T(\quad)$ und den wesentlichen Systemen von Zerlegungsgeweben auf analytischen Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ unter eigentlichen holomorphen Abbildungen zusammen:

2.1o Satz

Seien A und A' Polyedergebiete in $\mathbb{C}^2$ der Stufe $s > 2$ (bzw. $s' > 2$),

$F : A \longrightarrow A'$ eine eigentliche holomorphe Abbildung.

Dann gilt:

a) $T(A) = T(A')$, dh. $T(\quad)$ ist Invariante von Polyedergebieten gegenüber eigentlichen holomorphen Abbildungen.

b) Es seien $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{s_0}, \bar{w}'_1, \dots, \bar{w}'_{s_I}, \bar{w}''_1, \dots, \bar{w}''_{s_{II}})$ sowie

$(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{s_0}, \bar{w}'_1, \dots, \bar{w}'_{s_I}, \bar{w}''_1, \dots, \bar{w}''_{s_{II}})$ wesentliche Systeme von Zerlegungsgeweben auf A bzw. A' , (wobei der Reihe nach die linearen, Typ (I) und Typ (II) - Gewebe angeschrieben seien).

Dann gibt es Permutationen $\vartheta_0 \in \mathfrak{S}_{s_0}, \vartheta_I \in \mathfrak{S}_{s_I}, \vartheta_{II} \in \mathfrak{S}_{s_{II}}$ sowie

$\tau_1, \dots, \tau_{s_0}, \tau'_1, \dots, \tau'_{s_I}, \tau''_1, \dots, \tau''_{s_{II}} \in \mathfrak{S}_3$ mit

$$F : W_j \longrightarrow \bar{w}_{\vartheta_0(j)}^{\tau_j} \quad \text{für } j = 1, \dots, s_0 \text{ gewebetreu,}$$

$$F : W_1 \longrightarrow (\bar{w}'_{\vartheta_I(1)})^{\tau_1} \quad \text{für } i = 1, \dots, s_I \text{ gewebetreu,}$$

$$F : W_k'' \longrightarrow (\bar{w}''_{\vartheta_{II}(k)})^{\tau_k} \quad \text{für } k = 1, \dots, s_{II} \text{ gewebetreu.}$$

Beweis: Dies ist offenbar direkt aus dem Satz 1.3 von Remmert-Stein oder aus dem Hauptsatz 2.3 über die Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ mithilfe von Lemma II.2.4 zu schliessen; denn unter gewebetreuen Abbildungen werden lineare Gewebe in lineare, Typ (I) Gewebe in Typ (I) Gewebe und Typ (II) Gewebe in ebensolche übergeführt, wobei die Art der dabei vermittelnden Permutationen gemäss Lemma 2.8 bestimmt ist.

Folgerung

Es seien $A, A' \subset \mathbb{C}^2$ analytische Polyedergebiete mit $T(A) = T(A')$ und wesentlichen Systemen $(W_1, \dots, W_{s_0}, W'_1, \dots, W'_{s_I}, W''_1, \dots, W''_{s_{II}})$, $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_{s_0}, \bar{W}'_1, \dots, \bar{W}'_{s_I}, \bar{W}''_1, \dots, \bar{W}''_{s_{II}})$ von Zerlegungsgeweben auf

A bzw. auf A', derart dass gilt:

Es gibt ein i_0 mit $1 \leq i_0 \leq s_0$, so dass es für $j=1, \dots, s_0$ und jedes $\tau \in \mathbb{S}_3$ keine gewebetreue Abbildung $F_{i_0 j} : W_{i_0} \longrightarrow W_j^\tau$ gibt, (oder entsprechendes für ein W_{j_0}' , oder ein W_{k_0}'' gilt).

Dann gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildung von A nach A'.

Beispiel einer Anwendung

Die Polyedergebiete (mit gleicher Stufe $s = 4$)

$$A := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |zw| < \frac{1}{2}, |z + zw| < 1\}$$

$$A' := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |z + w| < 1, |z + zw| < 1\}$$

sind nicht eigentlich holomorph auf einander abbildbar:

es gilt: $(4, 0, 0) = T(A) \neq T(A') = (2, 2, 0)$

In A sind folgende wesentliche Zerlegungsgewebe definiert:

$W_1 = (A, -wdz, -zdw, d(zw))$ ist lineares Gewebe

$W_2 = (A, -(w+1)dz, -zdw, d(z+zw))$ ist lineares Gewebe

$W_3 = (A, -dz, -d(zw), d(z+zw))$ ist lineares Gewebe

$W_4 = (A, zdw, -(w+1)d(zw), d(z+zw))$ ist lineares Gewebe

In A' sind folgende wesentliche Zerlegungsgewebe definiert:

$\bar{W}_1 = (A', -dz, -dw, d(z+w))$ ist lineares Gewebe

$\bar{W}_2 = (A', -(w+1)dz, -zdw, d(z+zw))$ ist lineares Gewebe

$\bar{W}_3 = (A', (z-w-1)dz, -zd(z+w), d(z+zw))$ ist Gewebe von Typ (I)

$\bar{W}_4 = (A', (w-z+1)dw, -(w+1)d(z+w), d(z+zw))$ ist Gewebe von Typ (I)

Es gilt: W_4 ist lokal gewebetreu zu $(z, w, z(1 + w^{-1}))$; $\bar{W}_3$ ist lokal gewebetreu und ähnlich zu II 2.10 3); $\bar{W}_4$ ist lokal gewebetreu und ähnlich zu II 2.10 2) bzgl. $\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$.

A, A' sind Polyedergebiete, dies folgt leicht mit 1.2 b).

Die Behauptung erhält man mit 2.10.

In Erinnerung an die Überlegungen von I.1.6 bzw. nach I 1.11 lässt sich auch für Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m > 2$ eine Typ-Invariante kanonisch einführen.

2.11 Definition und Bemerkung

Sei A Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m > 2$ der Stufe s.

Dann sind folgende nichtnegative ganze Zahlen wohldefiniert:

s_0 := Zahl der linearen Zerlegungsgewebe auf A

s_1 := Zahl der nichtlinearen Zerlegungsgewebe auf A mit genau 1 analytischen unabhängigen Invariantenfunktionen für $1 \leq i \leq m$

$T(A) := (s, s_1, \dots, s_m)$ heiße Typ von A.

Offenbar ist $T(\cdot)$ eine Invariante der Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m > 2$ hinsichtlich der eigentlichen holomorphen Abbildungen zwischen Polyedergebieten (analog Satz 2.10).

2.12 Bemerkung mit Beispiel

Auch die Existenz nur globaler oder nur lokaler Linearisierungen von linearen Geweben (vgl. II §1) kann als invariante Eigenschaft für gewisse Polyedergebiete ausgenutzt werden:

Seien $P, Q \subset \mathbb{C}^m, m \geq 2$ Polyedergebiete, P besitze ein lineares Zerlegungsgewebe W_P mit globaler Linearisierung $L = (L_0, \dots, L_m)$. Weiter sei $f : Q \rightarrow P$ eigentliche holomorphe Abbildung. Dann besitzt auch Q ein Zerlegungsgewebe W_Q mit globaler Linearisierung $\tilde{L} = (L_0 \circ f, \dots, L_m \circ f)$.

Der Beweis ist klar.

Die Konsequenz:

Ist P Polyedergebiet mit einem linearen Zerlegungsgewebe und einer globalen Linearisierung; Q ein weiteres Polyedergebiet, dessen lineare Zerlegungsgewebe keine globale Linearisierung zulassen: so gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildung von Q nach P!

Beispiel:

$P := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_1| < 1, \dots, |z_m| < 1, |z_1 + \dots + z_m| < 1\}$
 $Q := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_1| < 1, \dots, |z_m| < 1, |z_1 \cdot \dots \cdot z_m| < \frac{1}{2}\}$
 (vgl. noch II.1.10 für die Linearisierungen!).

Kapitel IV Anwendungen der Gewebetheorie auf Polyedergebiete

§1 Polyedergebiete mit affinen Zerlegungsgeweben

In diesem Paragraphen werden affine Gewebe eingeführt, das sind spezielle lineare Gewebe mit globalen Linearisierungen aus affinen Funktionen; gewebetreue Abbildungen zwischen affinen Geweben auf Gebieten in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ sind Beschränkungen affiner Abbildungen. Dann werden Beispiele von Polyedergebieten mit ausschliesslich affinen Zerlegungsgeweben aus der Literatur (insbesondere: Rothstein [19], Behnke-Peschl [3], Hedtfeld [13]) wieder berechnet und Aussagen über Starrheit gewebetheoretisch nochmals überprüft oder ergänzt bzw. Familien nicht eigentlich holomorph auf einander abbildbarer Polyedergebiete definiert.

1.1 Bemerkungen

a) Existenz affiner Gewebe auf Gebieten G in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$

Sei $\mathfrak{A} \in M((m+1) \times m, \mathbb{C})$ eine Matrix komplexer Zahlen, so dass alle $(m \times m)$ -Untermatrizen von $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{i=1, \dots, m+1; j=1, \dots, m}$ den Rang m haben. Die affinen Funktionen

$$a_i : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}, (z_1, \dots, z_m) \longmapsto \sum_{j=1}^m a_{ij} z_j + b_i$$

mit beliebigen $b_1, \dots, b_{m+1} \in \mathbb{C}$ und $i = 1, \dots, m+1$

induzieren ein Gewebe auf $\mathbb{C}^m$:

es gibt $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{C}^*$ sowie $b \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$A_1 a_1 + \dots + A_m a_m + a_{m+1} + b = 0 \quad \text{auf } \mathbb{C}^m. \text{ Offenbar folgt:}$$

$$W_{\mathfrak{A}} := (\mathbb{C}^m, A_1 da_1, \dots, A_m da_m, da_{m+1}) \quad \text{definiert ein lineares}$$

Gewebe mit globaler Linearisierung $(A_1 a_1, \dots, A_m a_m, a_{m+1} + b)$ auf $\mathbb{C}^m$.

b) Sei $W_{\mathfrak{A}}$ ein affines Gewebe wie in a) bzgl. $(a_1, \dots, a_{m+1})$.

Dann gilt für jeden Punkt $P \in \mathbb{C}^m$:

$(A_1(a_1 - a_1(P)), \dots, A_m(a_m - a_m(P)), a_{m+1} - a_{m+1}(P))$ ist ebenfalls eine globale Linearisierung von $W_{\mathfrak{A}}$.

Wie in II §1 erläutert, erhält man mit $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ genau alle weiteren globalen Linearisierungen von $W_{\mathfrak{A}}$.

1.2 Definition

Ein meromorphes Gewebe $W = (U, \omega_1, \dots, \omega_{m+1})$ auf einem Gebiet U in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ heiße affines Gewebe, falls gilt:

es gibt $\mathfrak{U} \in M((m+1) \times m, \mathbb{C})$ wie in 1.1 a), so dass die Gewebe W und $W_{\mathfrak{U}}/U$ ähnliche Gewebe auf U sind.

1.3 Folgerungen (aus II §1 für affine Gewebe)

a) Seien $W = (U, \omega_1, \dots, \omega_{m+1})$ und $\bar{W} = (V, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{m+1})$ affine Gewebe auf Gebieten U, V in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ mit affinen globalen Linearisierungen $(L_1, \dots, L_{m+1})$ bzw. $(\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{m+1})$.

Es gibt genau dann mindestens eine (surjektive) gewebetreue Abbildung $F : W \longrightarrow \bar{W}$, falls gilt:

es gibt $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, so dass

$$(AL_1 + B_1, \dots, AL_m + B_m)(U) \underset{(\quad)}{\subset} (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m)(V) \quad (\text{Vgl. II.1.7})$$

Die Abbildung F wird durch

$$F := (\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_m)^{-1} \circ (AL_1 + B_1, \dots, AL_m + B_m) : U \longrightarrow V$$

gegeben und ist offenbar Beschrkung einer affinen Abbildung. (Vgl. analoge Aussagen in [16], S.186 Satz 15, [18], S.60 Satz 3)

b) Seien A und A' Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ deren (wesentliche) Zerlegungsgewebe $W_1, \dots, W_k$ bzw. $\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_k$, allesamt affine Gewebe auf A bzw. A' sind, (es seien die Stufen s bzw. $s' \geq m!$).

Es gibt genau dann (mindestens) eine eigentliche holomorphe Abbildung $F : A \longrightarrow A'$, falls gilt:

i) $k = k'$ (bzw. $s = s'$)

ii) Es seien $(L_1^1, \dots, L_{m+1}^1)$ bzw. $(\bar{L}_1^1, \dots, \bar{L}_{m+1}^1)$ affine Linearisierungen der Gewebe W_1 bzw. $\bar{W}_1$ für $i = 1, \dots, k$.

Es gibt Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_k, \tau^1, \dots, \tau^k \in \mathfrak{S}_{m+1}$ sowie

$(A^1, B_1^1, \dots, B_m^1) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, so dass für alle $i = 1, \dots, k$ gilt:

$$(AL_1^i + B_1^1, \dots, AL_m^i + B_m^1)(A) = (\bar{L}_{\tau^i(1)}^{\sigma(i)}, \dots, \bar{L}_{\tau^i(m)}^{\sigma(i)})(A') \quad \text{sowie}$$

$$F_i := (\bar{L}_{\tau^i(1)}^{\sigma(i)}, \dots, \bar{L}_{\tau^i(m)}^{\sigma(i)})^{-1} \circ (AL_1^i + B_1^1, \dots, AL_m^i + B_m^1)$$

definieren genau eine Abbildung $F = F_1 : A \longrightarrow A'$

(Vgl. III.2.10)

c) In praktischen Fällen sind die notwendigen Bedingungen von II 1.6 c), d) sehr nützlich:

Seien G, G' Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ mit gleicher Stufe $s > m$ und gleicher Anzahl affiner wesentlicher Zerlegungsgewebe $W_1, \dots, W_k$ auf G bzw. $\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_k$ auf G' ($k > 0$) mit den zugehörigen affinen (globalen) Linearisierungen $(L_1^1, \dots, L_{m+1}^1)$ bzw. $(\bar{L}_1^1, \dots, \bar{L}_{m+1}^1)$ für $i = 1, \dots, k$.

Zu festem W_1 auf G betrachte man die Mengen

$$L_1^1(A), \dots, L_{m+1}^1(G) \subset \mathbb{C}$$

sowie für jedes $j = 1, \dots, k$ die (durch Ähnlichkeitstransformationen $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m, B_{m+1} := -B_1 - \dots - B_m$ modifizierten) Linearisierungsbildmengen von $\bar{W}_j$

$$(AL_1^j + B_1)(G'), \dots, (AL_{m+1}^j + B_{m+1})(G') \subset \mathbb{C}$$

Wenn es keine Anordnung $\tau \in \mathfrak{S}_{m+1}$ und kein $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ gibt, so dass die Linearisierungsbildmengen $L_1^1(G), (l = 1, \dots, k)$

$(AL_{\tau(1)}^j + B_{\tau(1)})(G')$ als Mengen in $\mathbb{C}$ gleich sind, so gibt es sicher keine gewebetreue Abbildung $F_{1j} : W_1 \longrightarrow \bar{W}_j$

Wenn dies sogar für alle $j = 1, \dots, k$ der Fall ist, so gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildung $F : G \longrightarrow G'$.

Diese Argumentation wird allen folgenden Beispielen in diesem Paragraphen zugrunde gelegt.

d) Starrheit eines Gebietes in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$.

Ein Gebiet G in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ wird starr (bzgl. eigentlichen holomorphen Abbildungen) genannt, wenn es ausser der identischen Abbildung keine weitere eigentliche holomorphe Abbildung von G auf sich gibt.

Im Gegensatz zum Fall einer komplexen Veränderlichen gibt es einfach zusammenhängende Gebiete im $\mathbb{C}^m, m \geq 2$, die starr sind.

Um die Effizienz unserer Methode zu zeigen, werden nun Beispiele von Rothstein, Behnke-Peschl und Hedtfeld neu berechnet und hinsichtlich eigentlicher holomorpher Abbildungen verallgemeinert, (vgl. 1.4, 1.5 u. 1.7). Anschliessend fügen wir einige neue Resultate an.

1.4 Satz (Beispiele starrer Gebiete nach Rothstein [19], S.46)

Es seien folgende Gebiete definiert: (für $\varepsilon \in [0, 3]$)

$$A_\varepsilon := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : 0 < \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) < 1, 0 < \operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w) < 2, \\ \operatorname{Re}(w + (1 - \frac{\varepsilon}{2})z + \varepsilon - 3) < 0\}$$

Dann gilt:

- a) Für $\varepsilon \in]0, 3[$ ist jedes A_ε ein starres Polyedergebiet.
- b) $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, 3[}$ ist eine Familie von einfach zusammenhängenden Polyedergebieten, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf einander abgebildet werden können.

Beweis: Jedes $A_\varepsilon, \varepsilon \in [0, 3[$ ist ein euklidisches Polyedergebiet:

$$A_\varepsilon = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |\exp(-z)| < 1, |\exp(-iz)| < 1, |\exp(z-1)| < 1, \\ |\exp(iz-1)| < 1, |\exp(-w)| < 1, |\exp(-iw)| < 1, \\ |\exp(w-2)| < 1, |\exp(iw-2)| < 1, \\ |\exp(w + (1 - \frac{\varepsilon}{2})z + \varepsilon - 3)| < 1\}$$

Die angegebenen holomorphen Funktionen definieren ein Minimalsystem für A_ε , (für $\varepsilon > 1$ fallen e^{w-2} , für $\varepsilon > 2$: e^{z-1}, e^{iz-2} fort!) Als konvexes offenes Polyeder in $\mathbb{R}^4$ wird A_ε durch

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_1 < 0, x_1 + x_2 < 0, x_1 - x_2 - 2 < 0, \\ -x_1 - x_2 - 2 < 0, x_4 - x_3 < 0, x_3 + x_4 < 0, \\ x_3 - x_4 - 1 < 0, -x_3 - x_4 - 1 < 0, \\ (x_1 + x_2)(1 + \varepsilon/2) + x_3 - x_4 + \varepsilon - 3 < 0\}$$

beschrieben und ist einfach zusammenhängend.

A_ε ist ein Polyedergebiet der Stufe 3 und ein affines Zerlegungssystem für A_ε wird von den Funktionen

$$I_1^\varepsilon(z, w) := -(1 - \frac{\varepsilon}{2})z$$

$$I_2^\varepsilon(z, w) := -w$$

$$I_3^\varepsilon(z, w) := (1 - \frac{\varepsilon}{2})z + w \quad \text{auf } A_\varepsilon \text{ gebildet.}$$

Als Linearisierungsbildmengen ergeben sich:

$$I_1^\varepsilon(A_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{C} : -t = (1 - \frac{\varepsilon}{2})x, 0 < \operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x) < 1, \\ \operatorname{Re}(t) > \varepsilon - 3\}$$

$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon)$ ist ein offenes Quadrat in $\mathbb{C}$ mit der Seitenlänge $|1 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1|$, das um den Winkel $\pi + \arg(1 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1)$ gedreht ist. und für $\varepsilon > 1$ noch mit der positiven Halbebene durch $\varepsilon - 3$ geschnitten wird.

$$L_2^\varepsilon(A_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{C} : -2 < \operatorname{Re}(t), \operatorname{Im}(t) < 0, \operatorname{Re}(t) > \varepsilon - 3\}$$

ist ein offenes Quadrat in $\mathbb{C}$ der Seitenlänge 2 mit den Ecken $0, -2, -2-2i, -2i$, geschnitten (für $\varepsilon > 1$) mit der positiven Halbebene durch $\varepsilon - 3$, (dh. für $\varepsilon > 1$ ist $L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ das offene Rechteck mit den Ecken $0, -2i, \varepsilon-3-2i, \varepsilon-3$)

$$L_3^\varepsilon(A_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{C} : t = x + y, x \in L_1^\varepsilon(A_\varepsilon), y \in L_2^\varepsilon(A_\varepsilon), \operatorname{Re}(t) < 3 - \varepsilon\}$$

Diese Menge ist also die Minkowski'sche Mengensumme

$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon) + L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ geschnitten mit der negativen Halbebene durch $3 - \varepsilon$: ein Achteck mit vier Seiten (parallel zu denen von $L_1^\varepsilon(A_\varepsilon)$) der Länge $|1 - \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1|$ und vier Seiten (parallel zu jenen von $L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$) der Länge 2, das noch mit der Halbebene $\operatorname{Re}(t) < 3 - \varepsilon$ rechts abgeschnitten wird.

A_0 besitzt die Automorphismen

$$(z, w) \longmapsto (e^{i\pi/2}(z - 1/2) + 1/2, e^{i\pi/2}(w - 1) + 1)$$

$$(z, w) \longmapsto (e^{i\pi}(z - 1/2) + 1/2, e^{i\pi}(w - 1) + 1)$$

sowie ihre Hintereinanderausführungen: A_0 ist nicht starr.

(dies sieht man auch daran, dass die Linearisierungsbilder Quadrate der Länge 1 bzw. 2 bzw. ein bzgl. Drehungen um $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ und 360° symmetrisches Achteck sind; mittels II.2.10).

Alle anderen A_ε sind starr.

Gemäss den vorhergehenden Bemerkungen muss für $\tau \in \mathfrak{S}_3$ und

$(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2, B_3 := -B_1 - B_2$ untersucht werden, ob

$$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon) = (AL_{\tau(1)}^\varepsilon + B_1)(A_\varepsilon) \quad \text{für } i = 1, 2, 3 : \text{für Aussage a)}$$

$$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon) = (AL_{\tau(1)}^\eta + B_1)(A_\eta) \quad \text{für } \eta \neq \varepsilon, i = 1, 2, 3 : \text{für Aussage b)}$$

mit $\varepsilon \in]0, 3[$ (bzw. $\varepsilon, \eta \in]0, 3[$) möglich ist.

Ad a): Es kann zwischen den Fällen $\varepsilon \in]0,1]$ und $\varepsilon \in]1,3[$ unterschieden werden.

1) Sei $\varepsilon \in]0,1]$ beliebig, aber fest gewählt.

Die Linearisierungsbildmengen $L_1^\varepsilon(A_\varepsilon), L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ sind Quadrate, deren Seitenlängen wegen $1 + (\frac{\varepsilon}{2})^2 < 4$ immer verschieden sind:

$L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ ist immer das grössere Quadrat mit Seitenlänge 2.

Ausserdem ist $L_3^\varepsilon(A_\varepsilon)$ immer ein unregelmässiges Vieleck:

daher können diese drei Mengen nie mit Hilfe von Ähnlichkeitsabbildungen (in $\mathbb{C}$) mit gleichem Homothetiefaktor A untereinander vertauscht werden, d.h.: nur $\tau = \text{id}$ möglich!

Folglich ist nur noch zu prüfen: Gibt es $(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ und

$B_3 := -B_1 - B_2$, so dass

$$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon) = A L_1^\varepsilon(A_\varepsilon) + B_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 ?$$

Während man dies für $i = 1, 2$ (mit Drehungen um $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ und 360° Grad mit gewissen Translationskonstanten B_1, B_2) realisieren kann, ist es für $i = 3$ wegen der Unregelmässigkeit des Vielecks $L_3^\varepsilon(A_\varepsilon)$ nur für $A = 1, B_3 = 0$ möglich, also ist A_ε starr.

ii) Sei $\varepsilon \in]1,3[$ beliebig, aber fest gewählt.

$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon)$ ist für $1 < \varepsilon \leq 2$ ein Fünfeck, für $2 < \varepsilon < 3$ ein Dreieck.

$L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 2 und $3 - \varepsilon$.

$L_3^\varepsilon(A_\varepsilon)$ ist ein unregelmässiges Vieleck mit mindestens 4 Seiten.

Da die Mengen $L_i(A_\varepsilon), i = 1, 2, 3$ paarweise unterschiedliche Form haben, gibt es keine Ähnlichkeitstransformationen (A, B_1, B_2) mit gleichem Homothetiefaktor A , die sie untereinander vertauschen: d.h. $\tau = \text{id}$.

Wie eben ist noch zu überlegen, ob es $(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ sowie $B_3 := -B_1 - B_2$ gibt, so dass

$$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon) = A L_1^\varepsilon(A_\varepsilon) + B_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \text{ gilt.}$$

Da $L_1^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_3^\varepsilon(A_\varepsilon)$ immer unregelmässige Vielecke sind, ist nur $A = 1$ und $B_1 = B_3 = 0$ möglich.

Es gibt also ausser der identischen Abbildung keine eigentliche holomorphe Abbildung von $A_\varepsilon, \varepsilon \in]0,3[$ auf sich.

Damit ist die Behauptung a) überprüft.

Ad b): Man kann sich auf die Diskussion der Fälle $\varepsilon, \eta \in]0, 1[$ sowie $\varepsilon, \eta \in]1, 3[$ beschränken (wie man leicht aus dem Vorhergehenden ersieht).

1) Seien $\varepsilon, \eta \in]0, 1[$, $\varepsilon \neq \eta$ beliebig, aber fest gewählt.

$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_1^\eta(A_\eta)$ sind Quadrate der Seitenlänge $|1 - \frac{\varepsilon}{2}|$ und $|1 - \frac{\eta}{2}|$, d.h. die Seitenlängen sind verschieden und kleiner 2.

$L_2^\varepsilon(A_\varepsilon) = L_2^\eta(A_\eta)$ ist Quadrat der Seitenlänge 2.

$L_3^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_3^\eta(A_\eta)$ sind unregelmässige (verschiedene) Vielecke.

Bei Überführung der ε -Mengen in η -Mengen mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen $(A, B_1, B_2) \in \mathcal{C}^* \times \mathcal{C}^2$, $B_3 := -B_1 - B_2$ mit gleichem Homothetiefaktor A müssen offenbar die unregelmässigen Mengen $L_3^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_3^\eta(A_\eta)$ sowie die Quadrate ineinander übergehen.

Aus den Grössenverhältnissen der Quadrate aber folgt, dass nur $|A| = 1$ möglich ist, ($L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ muss in $L_2^\eta(A_\eta)$ übergehen) und folglich müsste $L_1^\varepsilon(A_\varepsilon)$ mit dem $L_1^\eta(A_\eta)$ kongruent sein:

dies ist nicht möglich, da diese Quadrate unterschiedliche Seitenlängen haben.

1i) Seien $\varepsilon, \eta \in]1, 3[$, $\varepsilon \neq \eta$ beliebig, aber fest gewählt.

$L_1^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_1^\eta(A_\eta)$ sind unregelmässige Drei- oder Fünfecke.

$L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_2^\eta(A_\eta)$ sind Rechtecke mit Seitenlängen 2 und $3 - \varepsilon$ bzw. $3 - \eta$.

$L_3^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_3^\eta(A_\eta)$ sind (verschiedene) unregelmässige Vielecke mit mindestens 4 Seiten.

Wenn man die ε -Mengen in die η -Mengen mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen überführen könnte, so müssten die unregelmässigen in unregelmässige und die rechteckige in die rechteckige übergehen: $L_2^\varepsilon(A_\varepsilon) = A L_2^\eta(A_\eta) + B_2$

Da $\varepsilon \neq \eta$ und $3 - \varepsilon, 3 - \eta < 2 =$ grösste Seitenlänge von $L_2^\varepsilon(A_\varepsilon)$ und $L_2^\eta(A_\eta)$ ist, folgt offenbar: es gibt keine derartigen A, B_2 .

Damit ist gezeigt, dass es keine eigentlichen holomorphen Abbildungen von A_ε in A_η für $\varepsilon, \eta \in]0, 3[$, $\varepsilon \neq \eta$ gibt; also gilt b).

Folgerung

Es seien folgende Gebiete in $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$ für $\varepsilon \in [0, m[$ definiert:

$$A_\varepsilon := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : 0 < \operatorname{Re}(z_i), \operatorname{Im}(z_i) < 1, i = 1, \dots, m, \\ \operatorname{Re}(\sum_{i=1}^{m-1} z_i + (1 - \frac{\varepsilon}{m-1}) z_m + \varepsilon - m - 1) < 0\}$$

Dann gilt:

- a) Jedes $A_\varepsilon, \varepsilon \in]0, m[$ ist starres euklidisches Polyedergebiet.
- b) $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, m[}$ ist eine Familie einfach zusammenhängender Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m$, die paarweise nicht eigentlich holomorph aufeinander abgebildet werden können.

(Dies lässt sich analog mit Hilfe gleicher Argumente wie im Beweis zu 1.4 wegen 1.3 c) schliessen).

Es werden jetzt die Beispiele von Behnke-Peschl [3], S.502 sowie von Hedtfeld [13], S.13. bzw. Zusatz S.20 betrachtet:

1.5 Satz

Jedes Polyedergebiet der Stufe 3 von der Gestalt

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |\exp(az+bw+c)| < 1\}$$

mit geeigneten $a, b, c \in \mathbb{C}$ ist zu genau einem der folgenden Polyedergebiete affin äquivalent:

$$P_{\alpha, \gamma} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |\exp(\alpha z + w + \gamma)| < 1\}$$

wobei $0 < \alpha \leq 1$ und $-(\alpha+1) < \gamma < \alpha+1$.

Ausserdem gilt noch:

- a) Jedes Polyedergebiet $P_{\alpha, \gamma}$ mit $\alpha \neq 1$ ist starr.
- b) $(P_{\alpha, \gamma} : 0 < \alpha \leq 1, -(\alpha+1) < \gamma < \alpha+1)$ ist eine Familie von einfach zusammenhängenden Polyedergebieten, die paarweise nicht eigentlich holomorph aufeinander abbildbar sind.

Behnke-Peschl [3], S.502 Satz 1 lautete:

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, \operatorname{Re}(a(w-1) + b(z-1) + \varepsilon) < 0\}$$

mit $\varepsilon, a, b \in \mathbb{R}$ und $0 < \varepsilon < a < b$ definieren starre Holomorphiegebiete.

Hedtfeld ([13], S.13 Satz 6) gibt die genauen Bedingungen an die komplexen Konstanten a, b, c dafür an, dass die Polyedergebiete $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, \operatorname{Re}(az+bw+c) < 0\}$ starr sind: dh. 1.5 a).

Beweis: Mit Hilfe der affinen Abbildungen

$$(z, w) \mapsto (az, bw) \text{ und } (z, w) \mapsto (w, z) \text{ (eventuell)}$$

kann o.B.d.A. angenommen werden, dass das Polyedergebiet von der folgenden Gestalt (und $0 < |a| \leq |b|$)

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < 1, |w| < 1, \operatorname{Re}(\alpha z + w + \gamma) < 0\}$$

mit $\alpha := |a| \cdot |b|^{-1}$, $\gamma := \operatorname{Re}(c) \cdot |b|^{-1}$ ist.

Offenbar ist $0 < \alpha \leq 1$; die Bedingung 'Stufe 3' liefert:

$$-(\alpha+1) < \gamma < \alpha+1$$

sonst wäre das Polyedergebiet von Stufe 2 oder leer.

Es müssen nur noch a) und b) gezeigt werden.

Dazu sollen die Zerlegungsgewebe $(P_{\alpha, \gamma}, -\alpha dz, -dw, d(\alpha z + w))$ von $P_{\alpha, \gamma}$ betrachtet werden.

$$L_1^\alpha(z, w) := -\alpha z \quad L_2^\alpha(z, w) := -w \quad L_3^\alpha(z, w) := \alpha z + w$$

definieren eine globale affine Linearisierung auf $P_{\alpha, \gamma}$.

Mit den Bezeichnungen:

$\beta E := \{t \in \mathbb{C}; |t| < \beta\}$ für β positive reelle Zahl

$$H_X^+ := \{t \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(t) > \operatorname{Re}(x)\}; \quad H_X^- := \{t \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(t) < \operatorname{Re}(x)\}$$

für $x \in \mathbb{R}$ folgt für die Linearisierungsbildmengen:

$$L_1(P_{\alpha, \gamma}) = H_{1-\gamma}^+ \cap \alpha E$$

$$L_2(P_{\alpha, \gamma}) = H_{\alpha-\gamma}^+ \cap E$$

$$L_3(P_{\alpha, \gamma}) = H_\gamma \cap (\alpha+1)E$$

Wegen $-(\alpha+1) < \gamma < \alpha+1$ handelt es sich um Kreissegmente von Kreisen um den Nullpunkt mit paarweise verschiedenen Radien $0 < \alpha < 1 < \alpha+1$ (sofern $\alpha \neq 1$).

$P_{\alpha, \gamma}$ besitzt offenbar den Automorphismus $(z, w) \mapsto (w, z)$ und ist deshalb nicht starr.

Für die Starrheit der übrigen bzw. Nichtabbildbarkeit ist zu prüfen, ob es $(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, $B_3 := -B_1 - B_2$ sowie $\tau \in \mathfrak{S}_3$ gibt,

$$\text{mit } L_1^\alpha(P_{\alpha, \gamma}) = A L_{\tau(1)}^\alpha(P_{\alpha, \gamma}) + B_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

$$\text{bzw. } L_1^\alpha(P_{\alpha, \gamma}) = A L_{\tau(1)}^{\tilde{\alpha}}(P_{\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}}) + B_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3; (\alpha, \gamma) \neq (\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})$$

Aus der Anordnung der Radien folgt sofort $\tau = \text{id}$ und da $L_3^\alpha(P_{\alpha, \gamma})$ immer ein echtes Kreissegment ist, muss $A = 1$ sein.

Die Verschiedenheit der Radien liefert a); b) ist ähnlich.

Folgerung

Jedes Polyedergebiet der Stufe $m + 1$ in $\mathbb{C}^m, m > 2$ der Form

$$\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_1| < 1, \dots, |z_m| < 1, |\exp(\sum_{i=1}^m a_i z_i + b)| < o\}$$

mit geeigneten $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{C}$

ist zu genau einem der folgenden Polyedergebiete affin äquivalent

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \gamma} := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_1| < 1, 1 = 1, \dots, m, \\ |\exp(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i z_i + z_m + \gamma)| < o\}$$

wobei $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{m-1} < 1$ und $-(\alpha+1) < \gamma < \alpha+1, \alpha := \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i$.

Ausserdem gilt:

a) Jedes Polyedergebiet $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \gamma}$ mit $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{m-1} < 1$ (und passenden γ) ist starr.

b) $(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \gamma} : 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{m-1} < 1, -(\alpha+1) < \gamma < \alpha+1)$ definiert eine Familie von einfach zusammenhängenden Polyedergebieten, die paarweise nicht eigentlich aufeinander abgebildet werden können.

(Dies folgt in kanonischer Weise mit analogen Argumenten wie im Beweis zu 1.5 wegen Bemerkung 1.3 c).).

Hedtfeld [13] hat in Satz 10 (S.35) und Satz (S.42) noch die Bedingungen für Starrheit an die Konstanten $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{C}$ von $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |\exp(a_1 z + b_1 w + c_1)| < 1, \\ i = 1, \dots, k > 1\}$

(es sind dies Polyedergebiete der Stufe $k+2 > 3$) bestimmt.

Die dazugehörigen Linearisierungsbildmengen sind dann Durchschnitte von gewissen Kreisen mit (bis zu) k Halbräumen in $\mathbb{C}$, die entsprechenden Aussagen werden hier nicht dargestellt.

Hedtfeld untersucht noch eine weitere Klasse von einfach zusammenhängenden Polyedergebieten: (vgl. [13], S.20, 45, 52, 54, 58, 66)

1.6 Definition

Ein Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ werde affines Polyedergebiet genannt, wenn es ein Minimalsystem $a_1, \dots, a_r$ des Polyedergebiets gibt, das nur aus Beschränkungen affiner Funktionen besteht, d.h.:

$$\{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |\sum_{i=1}^m a_{1i} z_i + b_1| < 1, \dots, |\sum_{i=1}^m a_{mi} z_i + b_m| < 1\}$$

1.7 Satz ([13], S.20, 66)

Sei P ein affines Polyedergebiet in $\mathbb{C}^2$ der Stufe 3 mit einem 3-elementigen Minimalsystem a_1, a_2, a_3 für P . Dann gilt:

a) P ist zu genau einem der folgenden Polyedergebiete der Stufe 3 affin äquivalent:

$$P_{\beta, \gamma}^{\alpha} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < \beta, |z+w+\alpha| < \gamma\}$$

wobei $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ mit $0 < \gamma \leq \beta \leq 1 < \alpha + \beta + \gamma$, $0 \leq \alpha < \beta + \gamma + 1$.

b) Die Menge der affinen Polyedergebiete von a) lässt sich in die folgenden Klassen zerlegen:

$\alpha = 0, 1 = \beta = \gamma$: Kreiskörper mit $\text{Aut}(P_{1,1}^0) \supset \mathfrak{S}_3$

$\alpha = 0, 1 = \beta > \gamma$: Kreiskörper mit $\text{Aut}(P_{1,\gamma}^0) \ni (123)$

$\alpha = 0, 1 > \beta = \gamma$: Kreiskörper mit $\text{Aut}(P_{\beta,\beta}^0) \ni (123)$

$\alpha = 0, 1 > \beta > \gamma$: Kreiskörper mit $\text{Aut}(P_{\beta,\gamma}^0) \cap \mathfrak{S}_3 = \text{id}$

$\alpha > 0, 1 = \beta = \gamma$: kein Kreiskörper, $\text{Aut}(P_{1,1}^{\alpha}) \supset \mathfrak{S}_3$

$\alpha > 0, 1 = \beta > \gamma$: kein Kreiskörper, $\text{Aut}(P_{1,\gamma}^{\alpha}) \ni (123)$

$\alpha > 0, 1 > \beta = \gamma$: kein Kreiskörper, $\text{Aut}(P_{\beta,\beta}^{\alpha}) \ni (123)$

$\alpha > 0, 1 > \beta > \gamma$: immer starr (vgl. [13], S.20 Satz 7)

c) $(P_{\beta,\gamma}^{\alpha})$: $0 \leq \alpha$, $0 < \gamma \leq \beta \leq 1 < \alpha + \beta + \gamma$, $-1 < \beta + \gamma - \alpha$

definiert eine Familie von einfach zusammenhängenden affinen Polyedergebieten der Stufe 3, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können. (S.a. [13], S.66).

(Die Aussage dieses Satzes kann man auch wie folgt ausdrücken: Der Modulraum der affinen Polyedergebiete der Stufe 3 mit 3-elementigem Minimalsystem ist ein unregelmässiger Hexaeder

$$M := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \alpha, 0 < \gamma \leq \beta \leq 1 < \alpha + \beta + \gamma, \alpha - \beta - \gamma < 1\}$$

mit drei offenen Seiten und drei abgeschlossen Seiten, die den Gleichungen $\alpha = 0, \beta = 1, \beta = \gamma$ genügen und die Repräsentanten der Polyedergebiete mit nichttrivialen Automorphismen enthalten. Der offene Kern von M enthält genau die Repräsentanten der starren Polyedergebiete der Stufe 3 mit 3-elementigen affinen Minimalsystem.)

$$(123) : (z, w) \mapsto (w, z) ; (132) : (z, w) \mapsto (z, z+w+\alpha) \text{ etc.}$$

Beweis: Mit Hilfe von affinen Koordinatentransformationen kann

$$P = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |a_1(z, w)| < 1, |a_2(z, w)| < 1, |a_3(z, w)| < 1\}$$

wobei $a_1(z, w) = a_{11}z + a_{12}w + b_1$; $a_{11}, a_{12}, b_1 \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$

$$\text{mit } da_1 \wedge da_2 \neq 0, da_2 \wedge da_3 \neq 0, da_3 \wedge da_1 \neq 0 \quad \text{in ein}$$

$$P_{\beta, \gamma}^\alpha = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < \beta, |z + w + \alpha| < \gamma\}$$

mit eindeutig bestimmten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ übergeführt werden.

Das Zerlegungsgewebe $(P_{\beta, \gamma}^\alpha, -dz, -dw, dz + dw)$ von $P_{\beta, \gamma}^\alpha$ ist offensichtlich linear und besitzt globale affine Linearisierungen

$$L_1(z, w) = -z, \quad L_2(z, w) = -w, \quad L_3(z, w) = z + w$$

(bis auf $(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2, B_3 := -B_1 - B_2$ eindeutig bestimmt.)

Es ergeben sich die folgenden Linearisierungsbildmengen (in $\mathbb{C}$):

$$L_1(P_{\beta, \gamma}^\alpha) = E \cap (\beta + \gamma) E(\alpha)$$

$$L_2(P_{\beta, \gamma}^\alpha) = \beta E \cap (1 + \gamma) E(\alpha)$$

$$L_3(P_{\beta, \gamma}^\alpha) = (1 + \beta) E \cap \gamma E(-\alpha) : \text{es sind Kreiszweiecke;}$$

wobei $a E(b) := \{t \in \mathbb{C} : |t - b| < a\}$ für $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{C}$.

Jetzt sieht man leicht, dass $P_{\beta, \gamma}^\alpha$ affines Polyedergebiet der Stufe 3 ist, falls gilt:

$$0 < \beta, 0 < \gamma \quad (\text{sonst ist dim } P_{\beta, \gamma}^\alpha < 2)$$

$$\alpha + \beta + \gamma > 1 \quad (\text{aus "}" folgt: Stufe von } P_{\beta, \gamma}^\alpha \text{ ist } 2)$$

$$\beta + \gamma > \alpha - 1 \quad (\text{aus "}" folgt: } P_{\beta, \gamma}^\alpha = \emptyset)$$

(Die restlichen Bedingungen folgen aus Eindeutigkeitsgründen:

$$0 < \alpha; \text{ wegen } (z, w) \mapsto (-z, -w); \gamma < \beta < 1; \text{ wegen } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & j & k \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3).$$

Alle $P_{\beta, \gamma}^\alpha$ sind offensichtlich Kreiskörper:

$$\text{jedes } (z, w) \mapsto (e^{i\varphi} z, e^{i\varphi} w), \varphi \in [0, 2\pi[\text{ ist Automorphismus.}$$

Ausserdem definiert

$$(z, w) \mapsto (w, z) \text{ den Automorphismus } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ von } P_{1, \gamma}^\alpha \text{ bzw.:}$$

$$(z, w) \mapsto (z, z + w + \alpha) \text{ den Automorphismus } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ von } P_{\beta, \beta}^\alpha$$

Es bleibt zu zeigen:

1) Jedes $P_{\beta, \gamma}^\alpha$ für $0 < \alpha, 0 < \gamma < \beta < 1$ ist starr: man muss somit prüfen, ob es $(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2, B_3 := -B_1 - B_2$ und $\tau \in \mathfrak{S}_3$ mit

$$L_1(P_{\beta, \gamma}^\alpha) = A L_{\tau(1)}(P_{\beta, \gamma}^\alpha) + B_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \text{ gibt.}$$

ii) Alle $P_{\beta, \gamma}^{\alpha}$ mit $0 < \alpha, 0 < \gamma < \beta \leq 1$ sind paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abbildbar:
hierzu ist zu überlegen, ob es zu $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ Konstanten $(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, $B_3 := -B_1 - B_2$ sowie $\tau \in \mathbb{S}_3$ gibt, so dass

$$L_1(P_{\beta, \gamma}^{\alpha}) = A L_{\tau(1)}(P_{\bar{\beta}, \bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}) + B_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

Da die acht disjunkten Klassen von b) durch echt verschiedene Automorphismengruppen charakterisiert werden, braucht ii) nur innerhalb jeder überprüft werden.

Ad i): Für die Linearisierungsmengen gilt:

$L_1(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ ist echtes Kreisbogenzweieck (wegen $1 < \alpha + \beta + \gamma$)
bzgl. Kreisen mit Radien 1 und $(\beta + \gamma)$

$L_2(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ ist echtes Kreisbogenzweieck für $1 - \beta + \gamma < \alpha$ bzgl.
Kreisen mit Radien β und $(1 + \gamma)$

bzw. ein Kreis mit Radius β für $1 - \beta + \gamma \geq \alpha$

$L_3(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ ist echtes Kreisbogenzweieck für $1 + \beta - \gamma < \alpha$ bzgl.
Kreisen mit Radien γ und $(1 + \beta)$

bzw. ein Kreis mit Radius γ für $1 + \beta - \gamma \geq \alpha$

Wegen $\gamma < \beta$ folgt: $1 + \beta - \gamma > 1 - \beta + \gamma$ d.h.:
falls L_2 Kreis liefert, so auch L_3 und umgekehrt bei Zweiecken
und es gibt deshalb genau die folgenden drei Fälle:

- $L_1(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ echtes Kreisbogenzweieck mit Radien 1 und $(\beta + \gamma)$
- a) $L_2(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ Kreis mit Radius β und es gilt $\alpha \leq 1 - \beta + \gamma$,
 $L_3(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ Kreis mit Radius γ .
- b) $L_2(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ Kreisbogenzweieck mit Radien β und $(1 + \gamma)$, $\alpha > 1 - \beta + \gamma$
 $L_3(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ Kreisbogenzweieck mit Radien γ und $(1 + \beta)$.
- c) $L_2(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ Kreisbogenzweieck mit Radien β und $(1 + \gamma)$, $\alpha > 1 - \beta + \gamma$
 $L_3(P_{\beta, \gamma}^{\alpha})$ Kreis mit Radius γ und es gilt $\alpha \leq 1 + \beta - \gamma$

Im Fall a) folgt sofort $\tau = \text{id}$ und für $(\beta + \gamma) \neq 1$ nur $A = 1, B_1 = 0$.
Aber wenn $(\beta + \gamma) = 1$ ist $A = -1$ möglich, aber für die $B_i, i = 1, 2, 3$
berechnet man: $B_1 = \alpha, B_2 = 0, B_3 = -2\alpha \neq -B_1 - B_2$
Im Fall b) folgt wegen $0 < \gamma < \beta < \beta + \gamma < 1 + \gamma < 1 + \beta$
 $\tau = \text{id}$ sowie $A = 1, B_1 = B_2 = B_3 = 0$.

Im Fall γ) muss man die Permutationen id und $\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$ betrachten:
 $\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$: Offenbar muss $|A| = 1$ sein, aber die Kreisbogenzweiecke kann man nicht vertauschen, da $\beta < 1$, $(\beta + \gamma)$ gilt.

id : Da $\beta < 1 + \gamma$ ist nur $A = 1, B_1 = 0, 1 = 1, 2, 3$ möglich.

Insgesamt folgt somit, dass die Starrheitsausage gilt.

Ad ii) Mit Hilfe des Vergleichs der Linearisierungsmengen.

Die Kreiskörper $P_{\beta, \gamma}^0$ haben Kreise als Linearisierungsbilder:

$$L_1(P_{\beta, \gamma}^0) = E \text{ (falls } (\beta + \gamma) \geq 1) = (\beta + \gamma) E \text{ (für } (\beta + \gamma) < 1)$$

$$L_2(P_{\beta, \gamma}^0) = \beta E$$

$$L_3(P_{\beta, \gamma}^0) = \gamma E$$

Aus $\gamma < \beta$ folgt leicht die paarweise Nichtabbildbarkeit.

Für die Nichtkreiskörper $P_{\beta, \gamma}^\alpha$ mit $0 < \alpha$ kann man jeweils die Fallunterscheidung $(\alpha, \beta), \gamma$) von oben heranziehen, da die Ähnlichkeitstransformationen $(A, B_1, B_2), B_3 := -B_1 - B_2$ nur Kreise wieder in Kreise sowie Kreisbogenzweiecke wieder in eben-solche abbilden können.

Für $1 = \beta > \gamma$ müssen die Fälle $(\beta), \gamma$)

für $1 > \beta = \gamma$ müssen die Fälle $(\alpha), \beta$)

für $1 > \beta > \gamma$ müssen die Fälle $(\alpha), \beta), \gamma$) betrachtet werden.

Mit naheliegenden Überlegungen für $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ folgt leicht die Behauptung:

Ist $\alpha \neq \bar{\alpha}$, so liefert die asymmetrische Lage der Linearisierungsmengen (zwei rechts, eine links) zusammen mit der Anordnung der Radien die Nichtabbildbarkeit.

Bei gleichen $(\alpha = \bar{\alpha})$ kann man ähnlich wie bei der Starrheit schliessen.

Hedtfeld hat in [13] die obigen Aussagen etwas anders gezeigt. Daneben hat er noch entsprechende Aussagen für affine Polyedergebiete der Stufe $k > 3$ mit $(k+2)$ -elementigem Minimalsystem in Satz 12 S.45 und Satz 14 S.54 gegeben, dies soll hier auch nicht ausgeführt werden. Zudem hat er auch die Aussage auf affine Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m > 2$ der Stufe $m+1$ mit $(m+1)$ -elementigem Minimalsystem.

Im Folgenden bringen wir ein Beispiel einer holomorphen Deformation von starren Polyedergebieten:

1.8 Satz (Beispiel einer holomorphen Deformation starrer Polyedergebiete mit starrem Polyedergebiet als Totalraum)

- a) Für jedes $b \in \mathbb{C}$ mit $0 < \operatorname{Re}(b - \frac{5}{6}) < \frac{1}{6}$, $0 < \operatorname{Im}(b) < \frac{1}{6}$ ist $P_b := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < \frac{1}{2}, |z + w + b| < \frac{1}{3}, |z + w + \frac{5}{4}| < \frac{1}{4}\}$ ein starres einfach zusammenhängendes Polyedergebiet der Stufe 3.
- b) $(P_b : 0 < \operatorname{Re}(b - \frac{5}{6}) < \frac{1}{6}, 0 < \operatorname{Im}(b) < \frac{1}{6})$ definiert eine Familie von starren einfach zusammenhängenden Polyedergebieten der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf einander abgebildet werden können.

c) Die folgende Menge

$$P := \{(z, w, b) \in \mathbb{C}^3 : |z| < 1, |w| < \frac{1}{2}, |z + w + b| < \frac{1}{3}, |z + w + \frac{5}{4}| < \frac{1}{4}, \\ 0 < \operatorname{Re}(b - \frac{5}{6}) < \frac{1}{6}, 0 < \operatorname{Im}(b) < \frac{1}{6}\}$$

definiert ein starres einfach zusammenhängendes Polyedergebiet der Stufe 4 in $\mathbb{C}^3$.

- d) Bzgl. der holomorphen Abbildung $\operatorname{pr}_3 : P \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt:
 $(\operatorname{pr}_3)^{-1}(\{b\}) = P_b \times \{b\}$

Beweis: P_b ist offenbar Durchschnitt einfach zusammenhängender Gebiete und Polyedergebiet mit dem Minimalsystem $z, w, z + w$; insbesondere ist also $(P_b, -dz, -dw, d(z + w))$ Zerlegungsgewebe auf P_b mit globalen Linearisierungen

$$L_1^b(z, w) = -z \quad L_2^b(z, w) = -w \quad L_3^b(z, w) = z + w$$

Dann berechnet man die Linearisierungsbildmengen :

$$L_1^b(P_b) = E \cap \frac{3}{4} E(\frac{5}{4}) \cap \frac{5}{6} E(b)$$

$$L_2^b(P_b) = \frac{1}{2} E \cap \frac{5}{4} E(\frac{5}{4}) \cap \frac{4}{3} E(b)$$

$$L_3^b(P_b) = \frac{1}{4} E(-\frac{5}{4}) \cap \frac{1}{3} E(-b)$$

Gemäss 1.3 c) ist zu überlegen, ob es zu $b, \bar{b}$ eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_3$ und $(A, B_1, B_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, so dass mit $B_3 := -B_1 - B_2$ gilt:

$$L_1^{\bar{b}}(P_{\bar{b}}) = A L_{\tau(1)}^b(P_b) + B_1 \quad \text{für } 1 = 1, 2, 3$$

Aber $L_3^{\bar{b}}(P_{\bar{b}})$ und $L_3^b(P_b)$ sind mit den kleinsten Radien $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ definiert: also muss $\tau(3) = 3$ und $B_3 = 0$ sein; sofort folgt a), b)!

P ist Polyedergebiet mit Minimalsystem $z, w, b, z + w + b$; in analoger Weise wie eben sieht man durch Berechnung seiner Linearisierungsbildmengen, dass P starr sein muss.

Bemerkungen:

Sei P affines Polyedergebiet der Stufe 3 mit 4-elementigem Minimalsystem a_0, a_1, a_2, a_3 für P. Dann gilt:

a) P ist zu einem der folgenden Polyedergebiete der Stufe 3 äquivalent:

$$P_{\alpha, \beta, \gamma}^{a, b} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < \gamma, |z+w+a| < \alpha, |z+w+b| < \beta\}$$

wobei $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ mit $0 < a, \alpha, \beta$ und $0 < \gamma \leq 1$ sowie $0 \leq |b| \leq a$

b) Es gelten noch:

$$|\alpha - \beta| < |a - b| < \alpha + \beta \quad (\text{abhängige Funktionen})$$

$$1 < \alpha + \beta + |b|, \quad -1 < \alpha + \beta - |b|, \quad -1 < \alpha - \beta + |b|$$

$$\alpha < 1 + \beta + |b|, \quad \beta < 1 + \gamma + a \quad (\text{sonst ist P leer, Stufe} < 3)$$

c) Das Zerlegungsgewebe $(P_{\alpha, \beta, \gamma}^{a, b}, -dz, -dw, d(z+w))$ besitzt die globalen Linearisierungen $L_1(z, w) = -z, L_2(z, w) = -w, L_3(z, w) = z+w$ und die Linearisierungsmengen sind folgendermassen:

$$L_1(P_{\alpha, \beta, \gamma}^{a, b}) = E \cap (\alpha + \gamma) E(a) \cap (\beta + \gamma) E(b)$$

$$L_2(P_{\alpha, \beta, \gamma}^{a, b}) = \gamma E \cap (1 + \alpha) E(a) \cap (1 + \beta) E(b)$$

$$L_3(P_{\alpha, \beta, \gamma}^{a, b}) = (1 + \gamma) E \cap \alpha E(-a) \cap \beta E(-b)$$

(dh. i. a. sind es Kreisbogendreiecke mit unterschiedlichen Radien, so dass, wenn die Konstanten nicht übereinstimmen, starre und nicht eigentlich holomorph auf einander abbildbare affine Polyedergebiete vorliegen. Mit Hilfe der Bemerkungen von 1.3 kann man dies in analoger Weise wie die letzten Sätze diskutieren, dies soll jedoch hier nicht ausgeführt werden).

Man bemerkt, dass affine Bedingungen wie $|az + bw + c| < \alpha$ zu Linearisierungsmengen mit Randstücken aus Kreisbögen und andererseits euklidische Bedingungen wie $|\exp(az + bw + c)| < \alpha$ zu Linearisierungsmengen mit geraden Randteilen führen.

Diese Tatsache soll in dem folgenden Satz über affine und euklidische Polyedergebiete mit Zerlegungsgeweben ausgenutzt werden:

1.9 Satz (Nichtabbildbarkeit zwischen affinen und euklidischen Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ der Stufe > 2)

Seien P ein affines und Q ein euklidisches Polyedergebiet der Stufe > 2 in $\mathbb{C}^2$.

Dann gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildung von P in Q und umgekehrt.

Beweis: Wenn die Stufen von P und Q verschieden sind, so ist nach dem Satz von Remmert-Stein III 1.3 die Aussage klar.

Man kann daher annehmen, dass P und Q affine Zerlegungssysteme $a_1, \dots, a_s$ bzw. $b_1, \dots, b_s$ mit $s > 2$ besitzen.

Aus 1.1 a) folgt, dass die Linearisierungsbildmengen der Zerlegungsgewebe auf P durch Ähnlichkeitstransformationen (dh. Drehung, Streckung, Stauchung und Translation in $\mathbb{C}$) aus den Mengen $a_1(P), \dots, a_s(P) \subset \mathbb{C}$ hervorgehen und entsprechendes gilt auch für die Linearisierungsbildmengen der Zerlegungsgewebe auf Q: sie gehen durch Ähnlichkeiten aus den Mengen $b_1(Q), \dots, b_s(Q) \subset \mathbb{C}$ ebenfalls hervor.

Wenn man also die $a_1(P), \dots, a_s(P)$ bzw. die $b_1(Q), \dots, b_s(Q)$ kennt, so kann man auf die Gestalt aller Linearisierungsmengen schließen.

1) Jede Linearisierungsmenge von P ist durch endlich viele Kreisebögen begrenzt.

Aus dem eben Gesagten folgt, man hat zu zeigen, dass jedes $a_i(P)$ von endlich vielen Kreisebögen begrenzt wird, $i = 1, \dots, s$.

Sei also ein festes beliebiges a_1 gewählt.

Nach Definition besitzt P ein affines Minimalsystem $a^1, \dots, a^k$ mit $k > s > 3$. Es gibt deshalb mindestens ein a^{j_0} mit

$da_1 \wedge da^{j_0} \neq 0$, dh. (a_1, a^{j_0}) definieren affine Koordinaten

für P derart, dass $(a_1, a^{j_0})(P) = P'$ mit

$$P' = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z - A^1| < \alpha_1, \dots, |z - A^r| < \alpha_r, \\ |w - B^1| < \beta_1, \dots, |w - B^n| < \beta_n, \\ |z + c_1 w - C^1| < \gamma_1, \dots, |z + c_t w - C^t| < \gamma_t \}$$

mit gewissen wohlbestimmten eindeutigen Konstanten

$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_t, A^1, B^1 \in \mathbb{R}$ sowie

$A^2, \dots, A^r, B^2, \dots, B^n, C^1, \dots, C^t, c_1, \dots, c_t \in \mathbb{C}$

und es gilt: $r + n + t = k$ mit $0 < r, n, t$, (da Stufe $s \geq 3$).

Aber nach Definition P' folgt: $a_1(P) = pr_1(P')$

Mit Hilfe der (schon mehrmals benutzten) Bezeichnungen

$\alpha E(A) = \{t \in \mathbb{C}: |t - A| < \alpha\}$ sowie $E := E(0)$ für $\alpha \in \mathbb{R}_+, A \in \mathbb{C}$

seien folgende Mengen definiert:

$$A := \alpha_1 E(A^1) \cap \alpha_2 E(A^2) \cap \dots \cap \alpha_r E(A^r)$$

$$B := \beta_1 E(B^1) \cap \beta_2 E(B^2) \cap \dots \cap \beta_n E(B^n)$$

$$C_\tau := \{x \in \mathbb{C}: |x + c_\tau y - C^\tau| < \gamma_\tau, y \in B\} \quad \tau = 1, \dots, t$$

$$= \bigcup_{y \in B} \gamma_\tau E(C^\tau - c_\tau y)$$

= Parallelkörper zum Radius γ_τ der Menge $-c_\tau \cdot B$, der um C^τ verschoben worden ist.

Da offenbar die Menge B von endlich vielen Kreisbögen begrenzt wird, müssen auch alle C_τ , $\tau = 1, \dots, t$ von endlich vielen Kreisbögen begrenzt werden. Schliesslich folgt:

$$a_1(P) = pr_1(P') = A \cap C_1 \cap \dots \cap C_t$$

muss von endlich vielen Kreisbögen begrenzt sein.

Durch Ähnlichkeiten geht $a_1(P)$ in Linearisierungsbildmengen von P über; solche aber führen Kreisbögen wieder in Kreisbögen über; die zugeordneten Linearisierungsmengen sind also wieder von endlich vielen Kreisbögen begrenzt. Da man dies mit jedem a_i , $i = 1, \dots, s$ machen kann, folgt die Behauptung i).

ii) Jede Linearisierungsmenge von Q wird von endlich vielen Geradenstücken begrenzt.

Analog wie eben genügt es zu zeigen, dass für jedes $i = 1, \dots, s$ die Menge $b_i(Q) \subset \mathbb{C}$ von endlich vielen Geradenstücken begrenzt wird. Sei also ein b_i beliebig, aber fest gewählt.

Es gibt affine Funktionen $b^1, \dots, b^l$ auf $\mathbb{C}^2$, so dass $\exp(b^1), \dots, \exp(b^l)$ Minimalsystem für Q ist: dh.

$$Q = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2: \operatorname{Re}(b^1(z, w)) < 0, \dots, \operatorname{Re}(b^l(z, w)) < 0\} \text{ und } l \geq 3.$$

Es gibt nun b^{j_0} mit $1 \leq j_0 \leq l$, so dass

$$db_1 \wedge db^{j_0} \neq 0 \quad \text{dh. } (b_1, b^{j_0}) \text{ definiert Koordinaten für } Q \text{ mit}$$

$$(b_1, b^{j_0})(Q) = Q' \quad (\text{dh. insbesondere } b_1(Q) = pr_1(Q')!)$$

wobei Q' ähnlich wie in i) folgendermassen bestimmt ist:

Es gibt eindeutig bestimmte Konstanten

$A^1, \dots, A^r, B^1, \dots, B^n, C^1, \dots, C^t \in \mathbb{R}$ sowie

$a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_t, d_1, \dots, d_t \in \mathbb{C}^*$, so dass

$Q' = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; \operatorname{Re}(a_1 z - A^1) < 0, \dots, \operatorname{Re}(a_r z - A^r) < 0,$

$\operatorname{Re}(b_1 w - B^1) < 0, \dots, \operatorname{Re}(b_n w - B^n) < 0,$

$\operatorname{Re}(c_\tau z + d_\tau w - C^\tau) < 0, \tau = 1, \dots, t \}$

mit gewissen Zahlen $0 < r, n, t$ so dass $r + n + t = 1$.

Weiter seien folgende Mengen eingeführt:

$A := \{t \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(a_1 t - A^1) < 0, \dots, \operatorname{Re}(a_r t - A^r) < 0\}$

$B := \{t \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(b_1 t - B^1) < 0, \dots, \operatorname{Re}(b_n t - B^n) < 0\}$

$C_\tau := \{x \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(c_\tau x + d_\tau y - C^\tau) < 0, y \in B\} \quad \tau = 1, \dots, t$

Offenbar werden die Mengen A, B jeweils von endlich vielen

Geradenstücken begrenzt, daher wird auch jedes $C_\tau, \tau = 1, \dots, t$

von endlich vielen Geradenstücken berandet.

Es folgt:

$b_1(Q) = \operatorname{pr}_1(Q') = A \cap C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_t$

muss von endlich vielen Geradenstücken begrenzt werden.

Da bei Ähnlichkeiten Geraden wieder in Geraden übergehen

und alle möglichen Linearisierungsbildmengen durch ebensol-

che Abbildungen aus den $b_1(Q)$ entstehen, folgt die Aussage ii).

Falls es eine eigentliche holomorphe Abbildung von P in Q

geben würde, so müsste nach 1.3 c) jede Linearisierungs-

menge von P vermöge einer Ähnlichkeit in eine gewisse Linearisie-

runismenge von Q übergehen. Wegen i) und ii) würden somit

Kreisbögen vermöge von Ähnlichkeiten in Geradenstücke überge-

führt werden; dies ist jedoch unmöglich. Es kann somit keine

eigentlichen holomorphen Abbildungen von P in Q geben.

Analog gilt auch der umgekehrte Sachverhalt.

Folgerung

a) Sei P Polyedergebiet in $\mathbb{C}^2$ mit Minimalsystem $a_1, \dots, a_r, f_1, \dots, f_t$

mit $f_\tau = \exp \circ b_\tau$ für $\tau = 1, \dots, t > 0, r > 0$ der Stufe $s > 2$, so

dass $a_1, \dots, b_1, \dots, b_t$ Beschränkungen affiner Funktionen sind.

Dann gilt es keine eigentliche holomorphe Abbildungen von P in

affine oder euklidische Polyedergebiete in $\mathbb{C}^2$ und umgekehrt.

(P ist i.w. von Typ der Gebiete in 1.5: es gibt Linearisierungsmengen von P , die von Geraden- und Kreisbögenstücken begrenzt sind).

b) Es gelten auch die höherdimensionalen analogen Aussagen:
Zwischen affinen, euklidischen und den Polyedergebieten von a) in $\mathbb{C}^m$, $m > 2$ der Stufe $s > m$ gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildungen.

(Analog dem Beweis zu 1.9 folgt:

Die Linearisierungsmengen affiner Polyedergebiete werden von endlich vielen Kreisbögen berandet.

Die Linearisierungsmengen euklidischer Polyedergebiete werden von endlich vielen Geradenstücken begrenzt.

Die Ränder der Linearisierungsmengen von Polyedergebieten wie in a) werden aus Kreisbögen und Geradenstücken zusammengesetzt. Wegen 1.3 c) gibt es keine eigentlichen holomorphen Abbildungen zwischen diesen verschiedenen Typen von Polyedergebieten).

Zum Abschluss dieses Paragraphen sollen nicht affine, aber global linearisierbare Polyedergebiete in $\mathbb{C}^2$ der Stufe 3 angegeben werden.

1.10 Satz

Für die folgenden Polyedergebiete der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$ gilt:

$$P_{A,B}^C := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |A z^2 + B w^2 + c| < 1\}$$

wobei $0 < A \leq B \leq 1 < A + B$ und $0 \leq c < 1 + A + B$ für $A, B, c \in \mathbb{R}_+$

a) Jedes $P_{A,B}^C$ für $0 < c$ und $0 < A < B < 1$ ist starr.

b) $(P_{A,B}^C : 0 < A \leq B \leq 1 < A + B, 0 \leq c < 1 + A + B)$ ist eine Familie von Polyedergebieten, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können.

Beweis: $P_{A,B}^C$ besitzt das Zerlegungssystem $z, w, A z^2 + B w^2 =: f$.

$(P_{A,B}^C, -2A z dz, -2B w dw, d(A z^2 + B w^2))$ ist das zugehörige Zerlegungsgewebe.

Damit $P_{A,B}^C$ echt von Stufe 3 ist, muss überprüft werden, ob es Punkte P_1, P_2, P_3 auf $\partial P_{A,B}^C$ mit $|pr_1(P_1)| = 1, |pr_2(P_1)| < 1, |f(P_1)| < 1$, bzw. $|pr_2(P_2)| = 1, |pr_1(P_2)| < 1, |f(P_2)| < 1$, sowie $|pr_1(P_3)| < 1, |pr_2(P_3)| < 1, |f(P_3)| = 1$ gibt:

Für $c = 1 + A + B t^2$ mit $t^2 \in [0, 1[$ sei $P_1 := (i, it)$

für $0 < c < 1 + A$ sei $P_1 := (i, 0)$

P_2 analog (vertauschte Rollen von A und B)

$P_3 := (it, it)$ mit $t := \sup\{T \in [-1, 1] : -(A+B)T^2 + c < 1\}$

Das Zerlegungsgewebe von $P_{A,B}^C$ besitzt die folgenden globalen Linearisierungsfunktionen:

$$\begin{aligned} L_1(z,w) &:= -A z^2 & L_2(z,w) &:= -B w^2 \\ L_3(z,w) &:= A z^2 + B w^2 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Linearisierungsbildmengen als gewisse Kreisbogenzweiecke:

$$L_1(P_{A,B}^C) = A E \cap (B+1) E(c)$$

$$L_2(P_{A,B}^C) = B E \cap (A+1) E(c)$$

$$L_3(P_{A,B}^C) = E(-c) \cap (A+B) E$$

mit $D E(a) := \{t \in \mathbb{C} : |t - a| < D\}$ für $D \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{C}$

Offenbar gilt: Jedes Kreisbogenzweieck wird durch zwei Kreise definiert, der eine mit Radius ≤ 1 , der andere mit Radius > 1 : (+).

Ausserdem gilt: $A+B \leq A+1 \leq B+1$

Offensichtlich besitzen alle Polyedergebiete (wegen Symmetrie)

$P_{A,A}^C$ den Automorphismus $(z,w) \mapsto (w,z)$.

Ausserdem sind alle $P_{A,B}^O$ Kreiskörper.

Man kann ähnlich wie in 1.7 wieder unterscheiden, ob die Kreisbogenzweiecke echte Kreise (mit den kleineren Radien A, B bzw. 1) definieren:

$$L_1(P_{A,B}^C) = A E \quad \text{falls } c + A \leq 1 + B \quad (1)$$

$$L_2(P_{A,B}^C) = B E \quad \text{falls } c + B \leq 1 + A \quad (2)$$

$$L_3(P_{A,B}^C) = E(-c) \quad \text{falls } c + 1 \leq A + B \quad (3)$$

Es gilt offensichtlich $(3) \rightarrow (2) \rightarrow (1)$; also gibt es 4 Fälle:

(I) $c + 1 \leq A + B$; drei Kreise mit Radien A, B bzw. 1

(II) $c + 1 > A + B$; $c + B \leq A + 1$;

nur $L_3(P_{A,B}^C)$ ist echtes Kreisbogenzweieck.

(III) $c + 1 > A + B$; $c + B > A + 1$; $c + A \leq B + 1$;

nur $L_1(P_{A,B}^C)$ ist echter Kreis

(IV) $c + 1 > A + B$; $c + B > A + 1$; $c + A > B + 1$;

alle $L_i(P_{A,B}^C), i = 1, 2, 3$ sind echte Kreisbogenzweiecke.

Nach 1.3 c) ist nun zu prüfen:

Gibt es $(a, b_1, b_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, $\tau \in \mathbb{S}_3$, so dass mit $b_3 := -b_1 - b_2$

$$L_1(P_{A,B}^C) = a L_{\tau(1)}(P_{A,B}^C) + b_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3; (A, B, c) \text{ gemäss a);}$$

$$L_1(P_{A,B}^C) = a L_{\tau(1)}(P_{A',B'}^C) + b_1 \quad \text{für } i = 1, 2, 3; (A, B, c) \neq (A', B', c') \text{ gemäss b).}$$

Ad a) : $0 < A < B < 1 < A + B$ und $0 < c < 1 + A + B$:

Man braucht nur die Fälle (I) - (IV) getrennt untersuchen:

(I) Wegen $c > 0$ und der echten Verschiedenheit der Radien der Kreise folgt sofort: $(a, b_1, b_2) = (1, 0, 0)$ und $\tau = \text{id}$.

(II) Da $L_3(P_{A,B}^C)$ echtes Kreisbogenzweieck, folgt: $a = 1, \tau(3) = 3$

Die Kreise $L_1(P_{A,B}^C), L_2(P_{A,B}^C)$ haben echt verschiedene Radien $A < B$ und können deshalb nicht vertauscht werden: $b_1 = b_2 = 0, \tau = \text{id}$.

(III) Da nur $L_1(P_{A,B}^C)$ Kreis ist, folgt $|a| = 1$ und $\tau(1) = 1$

Aber für die Radien der Kreisbogenzweiecke gilt:

$B < 1$ (die beiden kleineren) sowie $A + B < A + 1$ (die anderen) also können auch $L_2(P_{A,B}^C)$ und $L_3(P_{A,B}^C)$ nicht vertauscht werden: dh. $(a, b_1, b_2) = (1, 0, 0)$ und $\tau = \text{id}$.

(IV) Da die Kreisbögen mit den Radien > 1 (vgl. (+)) immer die linken Seiten der Kreisbogen-zweiecke liefern, folgt $a \in \mathbb{R}_+$.

$L_1(P_{A,B}^C)$ hat eine Kreisbogen-seite mit dem kleinsten Radius $A < B$, deshalb muss $\tau(1) = 1$ sein, sowie $a = 1$ gelten. Genauso wie bei (III) folgt nun $\tau = \text{id}$ und $(a, b_1, b_2) = (1, 0, 0)$.

Damit ist die Starrheit aller $P_{A,B}^C$ von a) überprüft.

Ad b) ($P_{A,B}^C$: $0 < A \leq B \leq 1 < A + B$; $0 < c < 1 + A + B$)

ist paarweise nicht eigentlich holomorph auf einander abbildbar.

Offensichtlich muss dies nur innerhalb der Klassen

(α) $P_{A,B}^0$: Kreiskörper für $0 < A \leq B \leq 1 < A + B$

(β) $P_{A,A}^C$: symmetrische Gebiete für $0 < c, 1/2 < A \leq 1, .$

(γ) $P_{A,B}^C$: restliche für $0 < c < 1 + A + B, 0 < A < B \leq 1 < A + B$
mit den Fällen (I) - (IV)

überprüft werden.

(α) klar, da wegen $L_3(P_{A,B}^0) = L_3(P_{A',B'}^0) = E$ immer $|a| = 1, \tau(3) = 3$

und aus $(A, B) \neq (A', B')$ aber $A = a A'$ und $B = a B'$ (da $A \leq B, A' \leq B'$) gelten muss; dies führt zu $|a| \neq 1$, also Widerspruch!

(β) Hier muss man die Fälle (I), (II) und (IV) unterscheiden:

Nach Voraussetzung sei $(A, c) \neq (A', c')$:

(I) Falls $c \neq c'$, so folgt aus $L_3(P_{A,A}^C) = E(-c), L_3(P_{A',A'}^{C'}) = E(-c')$
 $|a| = 1$, falls auch $A \neq A'$, so ist die Nichtabbildbarkeit klar;

falls $A = A'$, so gibt es keine geeigneten b_1, b_2, b_3 .

Falls $c = c'$ und $A \neq A'$, so ist ebenfalls $|a| = 1$ (L_3)

aber $A = a A'$ ist unmöglich (wegen $A \neq A', A, A' > 0$).

(II) Nur $L_3(P_{A,A}^C)$ und $L_3(P_{A',A'}^C)$ sind Kreisbogenzweiecke mit den Radien 1 sowie $2A$ bzw. $2A'$.

Offenbar muss $\tau(3) = 3$ und $|a| = 1$ sein (da die kleineren Radien beide gleich 1 sind). Für $A \neq A'$ ist dann alles klar. Jedoch für $A = A'$ folgt zunächst, dass $b_1 = b_2 = 0 = b_3$ ist. Aber für $c \neq c'$ ist dann immer $E(-c) \cap 2A E \neq a(E(-c') \cap 2A E)$, dh. es gibt kein geeignetes a .

(IV) Nur echte Kreisbogenzweiecke.

Wie eben folgt $|a| = 1$ (da L_3 den Radius 1 liefert).

Für $A \neq A'$ ist dann offenbar alles klar.

Für $c \neq c'$ und $A = A'$ gilt aber:

Die Mengen $A E \cap (1+A) E(c)$ und $A E \cap (1+A) E(c')$ sind nie kongruent, da $0 < c, c'$ und $c \neq c'$.

Deshalb ist keine Abbildung möglich.

(V) Hier kann man nach allen Fällen (I) - (IV) unterscheiden.

Nach Voraussetzung sei $(A, B, c) \neq (A', B', c')$ mit Ungleichungen:

$0 < A < B \leq 1 < A + B$ und $0 < c < 1 + A + B$

$0 < A' < B' \leq 1 < A' + B'$ und $0 < c' < 1 + A' + B'$.

(I) Alle Linearisierungsmengen seien Kreise:

Da der (kleinere) Radius von $L_3(P_{A,B}^C), L_3(P_{A',B'}^C)$ immer 1 ist, muss immer $|a| = 1$ sein, auch in den Fällen (II) - (IV).

Da $0 < A, A'$ und $A < B$ bzw. $A' < B'$ folgt $A = a A'$ für die kleinsten Radien A, A' . Damit ist der Fall $A \neq A'$ klar.

Es bleibt $(B, c) \neq (B', c')$ mit $A = A', a = 1$. Also ist $B \neq B'$ klar.

Für $c \neq c', A = A', B = B', a = 1$ folgt $b_1 = b_2 = 0 = b_3$:

Aber $E(-c) \neq E(-c')$, also auch klar.

(II) Es muss $|a| = 1$ und $\tau(3) = 3$ sein.

Falls $A \neq A'$, so ist (wegen $A < B, A' < B', A, A'$ kleinste Radien) alles klar; falls $A = A', B \neq B'$ ebenso.

Falls $A = A', B = B', c \neq c'$ so folgt offenbar, die Mengen

$L_3(P_{A,B}^C) = E(-c) \cap (A+B) E$ und $L_3(P_{A,B'}^C) = E(-c') \cap (A+B) E$

können nie (wegen $c \neq c'$) kongruent sein; also Nichtabbildbarkeit.

(III) Es muss $|a| = 1$ und $\tau(1) = 1$ sein.

Falls $A \neq A'$, ist alles klar (da A, A' kleinste Radien)

Falls $A = A', B \neq B'$ kann o.E. $B < B' \leq 1$ angenommen werden (sonst analog umgekehrt) und es muss $\tau(2) = 2$ (da der kleinere Radius von $L_3(P_{A,B}^C)$ und $L_3(P_{A,B'}^C)$ immer 1 ist); dies ist unmöglich, da $B \neq B'$ wegen $|a| = 1$. Für $A = A', B = B', c \neq c'$ wie bei (II).

(IV) $A \neq A'$ ist wie eben klar; das andere folgt wie (III).

Offensichtlich kann man dieselben Überlegungen auch im höherdimensionalen Fall und mit anderen Potenzen der Koordinatenfunktionen anstellen und erhält:

Folgerung: (Verallgemeinerung von 1.7 und 1.10)

Es seien $k_1, \dots, k_m \geq 1$ natürliche Zahlen.

Dann gilt für die folgenden Polyedergebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$

$$P_A = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i| < 1, i = 1, \dots, m, |\sum_{i=1}^m A_i z_i^{k_i} + a| < 1\}$$

der Stufe $m+1$ für $A = (A_1, \dots, A_m, a) \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit

$$0 < A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_m \leq 1 < \sum_{i=1}^m A_i ; 0 < a < 1 + \sum_{i=1}^m A_i$$

a) Jedes P_A für $0 < a$ und $0 < A_1 < \dots < A_m < 1$ ist starr.

b) $(P_A : 0 < A_1 \leq \dots \leq A_m \leq 1 < \sum_{i=1}^m A_i ; 0 \leq a < 1 + \sum_{i=1}^m A_i)$

ist eine Familie von Polyedergebieten der Stufe $m+1$ in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können.

Bemerkung zur Geschichte von affinen Zerlegungen

Rothstein macht in [19], S.44 Satz 11 schon entsprechende Aussagen über das Verhalten von affinen Zerlegungen unter biholomorphen Abbildungen und benutzt diese zur Begründung des Beispiels von 1.4.

Nachdem Koch 1953 in der Arbeit "Die analytische Projektion" in der Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster, Heft 6 den Begriff der "analytischen Projektion" einer holomorphen Funktion und die Zusammenhänge mit abhängigen Funktionen genauer erklären konnte, (heutige Terminologie: komplexe Basis; vgl. auch Stein [20], [21]), konnte Hedtfeld [13] die Aussage von Rothstein (vgl. insbesondere [13], S.7, Satz 3) zur Grundlage seiner Arbeit machen und weitere starre Gebiete angeben (es handelt sich i.w. um die Beispiele 1.5 sowie 1.7). Schliesslich wurde von Remmert-Stein [16] die entsprechende Aussage bzgl. eigentlichen holomorphen Abbildungen gezeigt und sein lokaler Charakter bemerkt (vgl. [16], S.187): dies entspricht genau den linearen Zerlegungsgeweben mit lokalen Linearisierungsfunktionen (die lokal ausserhalb einer gewissen analytischen Menge als Koordinatenfunktionen dienen und im Bild affine Zerlegungen liefern).

§2 Simplexgebiete im $\mathbb{C}^2$ und ihre Automorphismen

In diesem Paragraphen werden spezielle euklidische Polyedergebiete im $\mathbb{C}^2$ betrachtet, die durch 5 Eckpunkte (die zu je 4 nicht reell abhängigen Vektoren führen) definierten Simplexgebiete. Solche Simplexgebiete können von Stufe 3 (vgl. Remmert-Stein [16], S.184, 188), von Stufe 4 und 5 sein, es sollen das Ergebnis von [16] 6.4 S.188 für Simplexgebiete der Stufe 3 mit Mitteln der Gewebetheorie dargestellt sowie auch die Starrheit bzw. Nichtabbildbarkeit von Simplexgebieten höherer Stufe untersucht werden.

2.1 Definition (Simplexgebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$)

Es seien $P_0, \dots, P_{2m} \in \mathbb{C}^m$, so dass die Vektoren $v_i := P_i - P_0 \in \mathbb{R}^{2m}$ für $i = 1, \dots, 2m$ reell linear unabhängig sind.

Die $\mathbb{R}$ -konvexe Hülle $\bar{S}$ der Punkte $P_0, \dots, P_{2m}$ wird Simplex mit den Eckpunkten $P_0, \dots, P_{2m}$ genannt.

Der offene Kern S von dem Simplex $\bar{S}$ ist ein Polyedergebiet im $\mathbb{C}^m$ und wird (das zu $P_0, \dots, P_{2m}$ gehörende) Simplexgebiet genannt.

2.2 Bemerkungen

a) Die Menge $\bar{S}$ bzgl. den Eckpunkten $P_0, \dots, P_{2m} \in \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}, m \geq 2$ ist durch $\bar{S} := \{\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_{2m} P_{2m} \in \mathbb{C}^m; \lambda_0, \dots, \lambda_{2m} \in [0, 1], \sum_{i=0}^{2m} \lambda_i = 1\}$ gegeben. Ausserdem gibt es eine weitere Beschreibung mit Hilfe von reellen Stützfunktionen:

$$f_j : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_{2m}) \longmapsto \sum_{i=1}^{2m} a_{ij}^1 x_i + b_j$$

mit gewissen $a_j^1, \dots, a_{2m}^1, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 0, \dots, 2m$ so dass gilt:

$$f_j(P_j) < 0 \text{ und } f_j(P_k) = 0 \text{ für } k \neq j \text{ mit } j, k \in \{0, \dots, 2m\}$$

(offenbar sind für festes j die a_j^1, b_j bis auf einen gemeinsamen Multiplikationsfaktor $\neq 0$ eindeutig bestimmt).

Der Simplex $\bar{S}$ ist dann durch

$$\bar{S} = \{(x_1, \dots, x_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m} : f_j(x_1, \dots, x_{2m}) \leq 0 \text{ für } j = 0, \dots, 2m\}$$

gegeben. Übrigens gilt noch, dass alle $(m \times m)$ -Untermatrizen von $(a_j^1)_{i=1, \dots, 2m; j=0, \dots, 2m}$ vom Rang m sind.

Das Simplexgebiet S wird offensichtlich durch die Menge

$$S = \{(x_1, \dots, x_{2m}) \in \mathbb{R}^{2m} : f_j(x_1, \dots, x_{2m}) < 0 \text{ für } j = 0, \dots, 2m\}$$

beschrieben (und ist deshalb als Durchschnitt von Halbräumen einfach zusammenhängend).

b) S ist ein Polyedergebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$.

$\mathbb{C}^m$ kann man kanonisch mit $\mathbb{R}^{2m}$ identifizieren, wenn man $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ als $(\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Im}(z_1), \dots, \operatorname{Re}(z_m), \operatorname{Im}(z_m)) \in \mathbb{R}^{2m}$ und umgekehrt betrachtet. Dann liefern die reellen Stützfunktionen $f_1, \dots, f_{2m+1}$ von a ein Minimalsystem für S :

sei $f_j(x_1, \dots, x_{2m}) = \sum_{i=1}^m a_j^i x_i + b_j$ für $0 \leq j \leq 2m$, dann

sei $a_j(z_1, \dots, z_m) := \sum_{k=1}^m (a_j^{2k-1} - a_j^{2k}) z_k + b_j$

Es gilt offenbar:

$\operatorname{Re}(a_j(z_1, \dots, z_m)) = f_j(x_1, \dots, x_{2m})$ und somit gilt:

$S = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |\exp \circ a_j(z_1, \dots, z_m)| < 1, j = 0, \dots, 2m\}$

mit Minimalsystem $\exp \circ a_0, \dots, \exp \circ a_{2m}$.

S ist also Polyedergebiet der Stufe $\leq 2m+1$ mit nur affinen Zerlegungsgeweben, deshalb sind insbesondere alle eigentlichen holomorphen Abbildungen von Simplexgebieten auf sich Beschränkungen affiner Abbildungen, also Automorphismen. (Vgl. 1.3 a))

Das eben gegebene Minimalsystem $g_0, \dots, g_{2m}$ mit $g_j := \exp \circ a_j$ für S ist nicht eindeutig bestimmt:

$\bar{g}_0, \dots, \bar{g}_{2m}$ mit $\bar{g}_j := \exp \circ \bar{a}_j, \bar{a}_j := A a_j + 1 \cdot t$ für $A, t \in \mathbb{R}, A > 0$

ist offenbar ebenfalls Minimalsystem für S .

c) Die Projektionen $a_j(\bar{S})$ von $\bar{S}$ sind Dreiecke in $\mathbb{C}$

$\bar{S}$ ist offenbar konvex, da $\bar{S}$ $\mathbb{R}$ -konvexe Hülle von $P_0, \dots, P_{2m}$.

Da a_j affin, muss $a_j(\bar{S})$ auch konvex sein (dies kann man leicht nachrechnen). Für die Bildpunkte $a_j(P_l), l = 0, \dots, 2m$ folgt:

$a_j(P_l) \in i\mathbb{R}$, da $\operatorname{Re}(a_j(P_l)) = f_j(P_l) = 0$ für $l = 0, \dots, 2m; l \neq j$

$\operatorname{Re}(a_j(P_j)) < 0$ (klar nach a) wie eben)

Nach dem Satz von Caratheodory muss dann

$a_j(\bar{S}) = \mathbb{R}$ -konvexe Hülle von $\{a_j(P_0), \dots, a_j(P_{2m})\}$

sein und dies ist offenbar ein Dreieck.

Es folgt, $a_j(S)$ ist der offene Kern von $a_j(\bar{S})$: ein offenes

Dreieck mit den Ecken $a_j(P_j)$ und $Q_1, Q_2 \in \{a_j(P_l) : 0 \leq l \leq 2m, l \neq j\}$

Aus dieser Tatsache und der Bedingung, dass die Bilder $a_j(P_l)$ für $l \neq j$ alle auf der Geraden $i\mathbb{R}$ liegen, werden nun technische Aussagen über Stufen und Minimalsysteme von Simplexgebieten in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ abgeleitet.

2.3 Lemma

Sei S ein Simplexgebiet in $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$ mit den Ecken $P_0, \dots, P_{2m}$.
Dann gilt:

- a) Es gibt ein Minimalsystem $\exp \circ a_0, \dots, \exp \circ a_{2m}$ für S mit affinen Funktionen $a_0, \dots, a_{2m}$, so dass gilt:
 $\operatorname{Re}(a_j(P_j)) < 0$ und $\operatorname{Re}(a_j(P_l)) = 0$ für $0 \leq l, j \leq 2m; l \neq j$.
- b) Es seien die Funktionen a_j und a_l analytisch abhängig (mit $0 \leq l, j \leq 2m, l \neq j$), dann gilt:
es gibt $h \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ und $t_j, t_l \in \mathbb{R}$ mit
 $a_j + t_j 1 = h (a_l + t_l 1)$
- c) Wenn die Funktionen a_j und a_l (wie eben) analytisch abhängig sind, so folgt für die Eckpunkte $P_0, \dots, P_{2m}$:
es gibt $t \in \mathbb{R}$, so dass $a_j(P_k) + t 1 = 0$ für $0 \leq k \leq 2m; j \neq k \neq l$.
(dies bedeutet geometrisch, dass alle Eckpunkte ausser P_j, P_l auf einer komplexen $(m-1)$ -dimensionalen Hyperfläche liegen)
- d) Eine Funktion des Minimalsystems von a) kann höchstens von genau einer weiteren Funktion des Minimalsystems analytisch abhängig sein.

Beweis: a) wurde in 2.2 b) dargestellt. Für die weiteren Überlegungen sei ein solches Minimalsystem für S fest gewählt.

b) es seien a_j, a_l (mit $0 \leq l, j \leq 2m, l \neq j$) analytisch abhängig, dies bedeutet:

$$da_j \wedge da_l = 0 \quad \text{auf } S.$$

Für a_j, a_l gilt nach 2.2 b) :

$$a_j(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=1}^m \alpha_j^k z_k + \beta_j, \quad a_l(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=1}^m \alpha_l^k z_k + \beta_l$$

mit gewissen $\alpha_j^k, \beta_j, \alpha_l^k, \beta_l \in \mathbb{C}$ für $k = 1, \dots, m$

Aus $da_j \neq 0$ und $da_l \neq 0$ folgt leicht (vgl. auch 0.8):

es gibt $h = \alpha_j^{k_0} (\alpha_l^{k_0})^{-1} \neq 0$ mit $\alpha_j^k = h \alpha_l^k$ für $k = 1, \dots, m$

Fall 1 : $h \in \mathbb{R}$ (es sei $\beta_j = c_j + i d_j, \beta_l = c_l + i d_l$)

$$M_j := \{ \operatorname{Re}(a_j) < 0 \} = \{ \operatorname{Re}(\sum_{i=1}^m \alpha_j^i z_i) < -c_j \}$$

$$M_l := \{ \operatorname{Re}(a_l) < 0 \} = \{ \operatorname{Re}(\sum_{i=1}^m \alpha_l^i z_i) < -c_l \}$$

Sei P_k mit $j \neq k \neq l$ ein weiterer Eckpunkt mit $P_k = (P_{k,1}, \dots, P_{k,m})$
dann folgt wegen $\operatorname{Re}(a_j(P_k)) = 0$ und $\operatorname{Re}(a_l(P_k)) = 0$:

$$-c_j = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_j^i P_{k,i} \right) = h \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_1^i P_{k,i} \right) = -c_1 h$$

also ist $c_j = h c_1$ und für die Mengen M_j und M_1 gilt:
entweder $M_j = M_1$ oder $M_j \cap M_1 = \emptyset$

Aber andererseits sind $\exp \circ a_j$ und $\exp \circ a_1$ Minimalsystemfunktionen (nach a)) und es folgt ein Widerspruch zur Definition von Minimalsystem (insbesondere zu III. 1.1 c) 3)): die Mengen M_j und M_1 müssen echt verschiedene Ränder haben.

Also ist $h \in \mathbb{R}$ unmöglich und es gilt

Fall 2 : $h \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Für b) müssen noch $t_j, t_1 \in \mathbb{R}$ gefunden werden, so dass

$$a_j + t_j i = h (a_1 + t_1 i)$$

Mit den eben benutzten Bezeichnungen folgen durch Ausmultiplizieren die Gleichungen:

$$c_j = a c_1 - b(d_1 + t_1) \rightarrow b t_1 = a c_1 - c_j - b d_1 \quad (1)$$

$$d_j + t_j = a(d_1 + t_1) + b c_1 \rightarrow t_j = a(d_1 + t_1) + b c_1 - d_j \quad (2)$$

Wegen der Überlegungen zu Fall 1 ist $h \notin \mathbb{R}$, dh. $b \neq 0$ und somit sind die Gleichungen (1) und (2) lösbar: es gilt b)!

c) Die Eigenschaft b) hat für die Dreiecke $a_j(S)$ und $a_1(S)$ folgende Bedeutung:

$$a_j(S) + t_j i = h a_1(S) + t_1 i \quad (\text{dh. beide sind ähnlich})$$

insbesondere gehen (bei dieser Ähnlichkeitstransformation) die Punkte $a_j(P_k), 0 \leq k \leq 2m, j \neq k \neq 1$ auf der Geraden $i\mathbb{R}$ in die Punkte $a_1(P_k), 0 \leq k \leq 2m, j \neq k \neq 1$ auf der Geraden $i\mathbb{R}$ über: (+) Da bei Ähnlichkeitstransformationen Dreiecke in Dreiecke bzw. Eckpunkte in Eckpunkte übergehen folgt:

$a_j(P_j)$ geht in die Ecke $a_1(P_j)$ von $a_1(S)$ über,

$a_j(P_1)$ geht in die Ecke $a_1(P_1)$ von $a_1(S)$ über.

Da h nicht reell ist, geht bei der Ähnlichkeitstransformation die Gerade $i\mathbb{R}$ nicht in die Gerade $i\mathbb{R}$ über, dh. es gibt genau einen Punkt P auf $i\mathbb{R}$, der in einen Punkt Q auf $i\mathbb{R}$ übergeht: wegen (+) muss gelten: $P = a_j(P_k)$ für alle $0 \leq k \leq 2m, j \neq k \neq 1$

$$Q = a_1(P_k) \quad " \quad " \quad " \quad " \quad "$$

Als Nebenergebnis folgt: (womit auch d) sofort klar ist)

$a_j(S)$ ist das Dreieck mit den Ecken $a_j(P_j), a_j(P_1), P = a_j(P_k)$

$a_1(S)$ ist das Dreieck mit den Ecken $a_1(P_j), a_1(P_1), Q = a_1(P_k)$

2.4 Satz (Über die Stufen von Simplexgebieten in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$)

a) Ein Simplexgebiet in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ ist von Stufe s mit $m+1 \leq s \leq 2m+1$.

b) Ein Simplexgebiet S in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ ist genau dann von Stufe $< 2m - r + 1$ mit $0 \leq r \leq m$, wenn gilt:

es gibt eine affine Abbildung $\alpha: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$, so dass der Simplex $\tilde{S}^* := \alpha(\tilde{S})$ die folgenden Eckpunkte definiert:

$$\begin{aligned} P_0^* &= 0, \quad P_k^* = e_k \quad \text{für } k = 1, \dots, m; \text{ es gibt } a_\rho, b_j^\rho \in \mathbb{C} \\ P_{m+\rho}^* &= a_\rho e_\rho + \sum_{j=1}^{m-r} b_j^\rho e_{r+j} \quad \text{für } \rho = 1, \dots, r \quad (\text{mit } a_\rho \in \mathbb{C} - \mathbb{R}) \end{aligned}$$

P_{m+r+j}^* liegen in dem von $e_{r+1}, \dots, e_m$ aufgespannten komplexen $(m-r)$ -dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{C}^m$.

($e_1, \dots, e_m$ bezeichnen die komplexen Basisvektoren von $\mathbb{C}^m$).

Beweis: a) folgt sofort aus Lemma 2.3 b) und c).

b) Sei S von Stufe $s < 2m - r + 1$. Dann folgt nach 2.3 c), d):

Die Ecken $P_0, \dots, P_{2m}$ von S (mit Minimalsystem $\exp \circ a_i, 0 \leq i \leq 2m$) können o.E. so numeriert werden, dass gilt:

$da_\rho \wedge da_{m+\rho} = 0$ für $\rho = 1, \dots, r$. Sei nun ein ρ fest gewählt:

Dann gilt: $a_\rho(P_1) = a_\rho(P_0)$ für alle l mit $0 \leq l \leq 2m, l \neq \rho, m+\rho$

dies bedeutet: alle $P_1, l \neq \rho, m+\rho$ liegen in einer komplexen Hyperebene der komplexen Dimension $m-1$, die H_ρ genannt sei.

$H := \bigcap_{\rho=1}^r H_\rho$ ist affiner Unterraum von $\mathbb{C}^m$, der komplexen Dimension $m-r$ und enthält die Eckpunkte $P_{r+j}, P_{2(r+j)}, j = 1, \dots, m-r$ und P_0 . Man kann davon $(m-r)$ P_{r+j}^* 's so auswählen, dass gilt:

$P_1 - P_0, \dots, P_r - P_0, P_{r+1}^* - P_0, \dots, P_m^* - P_0$ definieren eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^m$.

Damit kann man offenbar eine geeignete affine Abbildung α wie in b) finden: $\alpha := (a_1 - a_1(P_0), \dots, a_m - a_m(P_0))$

Umgekehrt muss für $\tilde{S}^*$ mit den Eckpunkten $P_0^*, \dots, P_{2m}^*$ gezeigt werden, dass $\tilde{S}^*$ von der Stufe $< 2m - r + 1$ ist.

Hierfür genügt es zu zeigen, dass $da_\rho^* \wedge da_{m+\rho}^* = 0, 1 \leq \rho \leq r$ gilt. Sei also ein ρ fest gewählt.

Offenbar liegen alle P_1^* mit $0 \leq l \leq 2m, l \neq \rho, m+\rho$ in dem von $e_1, \dots, \hat{e}_\rho, \dots, e_m$ aufgespannten $(m-1)$ -dimensionalen komplexen Untervektorraum.

Sei $a := pr_\rho$, dann gilt: $a(P_1^*) = a(P_0^*)$ für $0 \leq l \leq 2m, l \neq \rho, m+\rho$

Offensichtlich folgt, da $a(P_\rho^*), a(P_{m+\rho}^*), a(P_0^*) = 0$ ein echtes Dreieck in $\mathbb{C}$ definieren:

es gibt $A_\rho, A_{m+\rho} \in \mathbb{C}^*$ und $B_\rho, B_{m+\rho} \in \mathbb{C}$, so dass die Funktionen

$$a_\rho := A_\rho a + B_\rho \quad \text{und} \quad a_{m+\rho} := A_{m+\rho} a + B_{m+\rho}$$

die reellen Stützfunktionen $f_\rho := \operatorname{Re}(a_\rho)$ sowie $f_{m+\rho} := \operatorname{Re}(a_{m+\rho})$ von S^* bzgl. der Punkte $P_\rho^*, P_{m+\rho}^*$ liefern.

Nach 2.2 a) können sie sich von den ursprünglichen reellen Stützfunktionen $\operatorname{Re}(a_\rho^*)$ und $\operatorname{Re}(a_{m+\rho}^*)$ nur um einen reellen Faktor ($\neq 0$) unterscheiden. Nach Konstruktion des Minimalsystems 2.2 b) folgt dann offenbar:

$a_\rho^*, a_{m+\rho}^*$ müssen analytisch abhängig sein (genauso $a_{m+\rho}^*, a_{m+\rho}^*$);

da a_ρ und $a_{m+\rho}$ analytisch abhängig sind, folgt:

a_ρ^* und $a_{m+\rho}^*$ sind analytisch abhängig (dh. die Stufe sinkt ab).

Insgesamt bedeutet diese Überlegung: die Projektionen p_ρ für $\rho = 1, \dots, r$ liefern die Zerlegungsfunktionen für die ersten Funktionen $\exp \circ a_1^*, \dots, \exp \circ a_r^*, \exp \circ a_{m+1}^*, \dots, \exp \circ a_{m+r}^*$ des Minimalsystems, die restlichen $(2m - 2r + 1)$ Funktionen liefern die anderen Zerlegungsfunktionen:

es folgt, die Stufe von S ist $< 2m - r + 1$.

Damit ist der Satz klar.

Die dargestellten Überlegungen zu b) zeigen: falls es eine Funktion $\exp \circ a_k$ aus dem (nach 2.2 b) konstruierten) Minimalsystem gibt, so dass $(2m - 1)$ Eckpunkte auf ein und dieselbe Ecke von $a_k(S)$ abgebildet werden, so muss es eine weitere Funktion aus dem Minimalsystem geben, die von a_k analytisch abhängig ist. Also kann man aus den Projektionsbildern $a_k(S)$ (die vermöge gewissen Ähnlichkeiten auch die Linearisierungsbildmengen der Zerlegungsgewebe von S liefern) gewisse Rückschlüsse auf S und seine Stufe ziehen:

z.B. müssen bei Automorphismen oder eigentlichen holomorphen Abbildungen die Dreiecke mit dreielementigem $\{a_k(P_1); 0 < 1 < 2m\}$ wieder in ebensolche übergehen (und umgekehrt, etc.).

Nach diesen allgemeinen Überlegungen werden nun mit Hilfe der induzierten wesentlichen Zerlegungsgewebe auf Simplexgebieten und den zugeordneten Linearisierungsdreiecken spezielle Simplexgebiete auf Starrheit und Nichtabbildbarkeit untersucht: die einfachsten sind offenbar die Simplexgebiete der Stufe $m+1$.

2.5 Satz (Simplexgebiete der Stufe $m+1$ im $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$;
für $m = 2$ vgl. Remmert-Stein [16], S. 188, 6.4)

Für $m \geq 2$ bezeichne A_m die folgende Menge

$\{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{C}^m : \operatorname{Im}(\alpha_j) > 0 \text{ für alle } 1 \leq j \leq m, \text{ mit}$

$0 < |\alpha_1| \leq \dots \leq |\alpha_m| \text{ so dass gilt:}$

(+) falls $|\alpha_k| = |\alpha_l|$ für $k < l$, $1 \leq k, l \leq m$
so folgt $\arg(\alpha_k) < \arg(\alpha_l)$)

Dann gilt:

a) Jedes $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in A_m$ definiert ein Simplexgebiet S_a

mit den Eckpunkten $P_0 := 0, P_j := e_j, P_{m+j} := \alpha_j e_j, 1 \leq j \leq m$.
($(e_1, \dots, e_m)$ sei die kanonische komplexe Basis von $\mathbb{C}^m$).

b) Das Simplexgebiet S_a mit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in A_m$ ist starr,
wenn alle α_j ($1 \leq j \leq m$) paarweise verschieden sind.

c) Sei S_a mit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in A_m$ ein Simplexgebiet.

Dann induziert jede (nichttriviale) Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$

mit $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(m)})$ einen nichttrivialen

Automorphismus $f_\sigma : S_a \longrightarrow S_a$

d) Es seien S_a und $S_{a'}$ Simplexgebiete der Stufe $m+1$ in $\mathbb{C}^m$
mit $a, a' \in A_m$ und $a \neq a'$.

Dann gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildung von S_a
in $S_{a'}$.

(Dh. $(S_a : a \in A_m)$ ist eine Familie von Simplexgebieten der
Stufe $m+1$ in $\mathbb{C}^m$, die nicht paarweise eigentlich holomorph auf-
einander abgebildet werden können).

e) Jedes Simplexgebiet S der Stufe $m+1$ in $\mathbb{C}^m$, $m \geq 2$ ist zu
genau einem S_a mit $a \in A_m$ affin äquivalent.

(Dh. A_m ist der Modulraum der Simplexgebiete von Stufe $m+1$
in $\mathbb{C}^m$ bzgl. eigentlichen holomorphen Abbildungen).

Beweis: a) ist klar, wegen $\operatorname{Im}(\alpha_j) > 0, 1 \leq j \leq m$ und Satz 2.4.

c) ebenfalls, wenn man den Automorphismus f_σ mit Hilfe der
linearen Abbildung $F_\sigma : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m, F_\sigma(e_j) := e_{\sigma(j)}, 1 \leq j \leq m$
als Beschränkung von F_σ auf S_a definiert.

Die Aussagen b) und d) erhält man in analoger Weise wie in §1 mit Hilfe des wesentlichen Zerlegungsgewebes von S_a (bzw. S_{a_1}) wegen 1.3 b), c). (Vgl. auch II 1.6, 7).

Zunächst werden die Zerlegungsgewebe von $S_a, a \in A_m$ und gewisse spezielle Linearisierungen (vgl. 1.1 b)) berechnet; die zugehörigen Linearisierungsmengen sind (offene) Dreiecke in $\mathbb{C}$, so dass ihre Ecken die Bildpunkte von gewissen Simplexecken sind.

Nach 2.2 b) besitzt $S_a, a \in A_m$ ein Minimalsystem $\exp \circ b_j$, wobei b_j Beschränkungen von bestimmten affinen Funktionen sind und $0 \leq j \leq 2m$ gilt. Ausserdem gilt:

$db_k \wedge db_{m+k} = 0$ für $1 \leq k \leq m$, sowie für jedes feste $k \neq 0$

$b_k(P_1) = b_k(P_0)$ und $b_{m+k}(P_1) = b_{m+k}(P_0)$ für $0 \leq l \leq 2m, l \neq k, m+k$

jedoch für b_0 gilt eine analoge Aussage nie.

Deshalb folgt:

$db_k \wedge d(pr_k) = 0$ (dh. $db_k \wedge dz_k = 0$ für Koordinaten $(z_1, \dots, z_m)$)

und die Funktionen $a_0, \dots, a_m$ sind ein Zerlegungssystem für S_a , wobei mit Koordinaten $(z_1, \dots, z_m)$ von $\mathbb{C}^m$ definiert sei:

$a_0(z_1, \dots, z_m) := b_0(z_1, \dots, z_m) - b_0(P_0) = \sum_{i=1}^m a^1 z_i$, mit $a^1 \in \mathbb{C}^*$

$a_k(z_1, \dots, z_m) := z_k$ für $1 \leq k \leq m$.

Das zugehörige (wesentliche) Zerlegungsgewebe von S_a ist dann:

$(S_a, -a^1 dz_1, \dots, -a^m dz_m, da_0) = : W_a$

$L_0(z_1, \dots, z_m) := a_0(z_1, \dots, z_m)$

$L_k(z_1, \dots, z_m) := -a^k z_k \quad 1 \leq k \leq m$

ist eine globale affine Linearisierung von W_a .

Zur Berechnung der Linearisierungsdreiecke:

Offenbar ist die Menge $a_k(S_a)$ das offene Dreieck mit den Ecken $0, 1, a_k$ (für $1 \leq k \leq m$).

Die Linearisierungsbildmenge $L_k(S_a)$ ist dann das Dreieck mit den Ecken $0, -a^k, -a^k a_k$.

Die Linearisierungsbildmenge $L_0(S_a)$ ist ein Dreieck, das sich als der offene Kern der $\mathbb{R}$ -konvexe Hülle von $L_0(P_1), 0 \leq l \leq 2m$ ergibt; insbesondere gilt:

$L_0(\bar{S}_a) = \mathbb{R}$ -konvexe Hülle von $\{0, a^1, \dots, a^m, a^1 a_1, \dots, a^m a_m\}$

$\operatorname{Re}(a^k) = \operatorname{Re}(a^k a_k) = -\operatorname{Re}(b_0(P_0)) > 0$ für $1 \leq k \leq m$.

Also ist $L_0(S_a)$ ein Dreieck mit Ecke 0 und der Gegenseite, die auf der zu $i\mathbb{R}$ parallelen Geraden durch $c := -\operatorname{Re}(b_0(P_0)) \in \mathbb{R}_+^*$

liegt. Die Ecken $L_k(P_k), L_k(P_{m+k})$ von $L_k(S_a)$ liegen also für alle k mit $1 \leq k \leq m$ auf der durch $-c$ laufenden und zu $i\mathbb{R}$ parallelen Geraden (dies folgt aus: $L_0 + \dots + L_m = 0$). Gemäss dem in 1.3 c) dargestellten Prinzip ist für die Behauptungen b) und d) zu prüfen:

Gibt es Permutationen $\tau \in \mathfrak{S}_{m+1}$ (der Zahlen $0, 1, \dots, m$) und $(A, B_1, \dots, B_m) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, so dass mit $B_0 := -B_1 - \dots - B_m$ gilt:

$$L_k(S_a) = A L_{\tau(k)}(S_a) + B_k \text{ für } k = 0, \dots, m \text{ im Fall b);}$$

$$L_k(S_a) = A L_{\tau(k)}(S_a) + B_k \text{ für } k = 0, \dots, m \text{ im Fall d)?}$$

(Hierbei seien die Linearisierungsfunktionen von S_a , zur Unterscheidung mit $L_j, 0 \leq j \leq m$ bezeichnet).

Wie bereits bemerkt, sind eigentliche holomorphe Abbildungen $f: S \longrightarrow S'$ zwischen Simplizes S, S' immer Beschränkungen affiner Abbildungen $a: \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$.

Unter affinen Abbildungen gehen Simplizes wieder in Simplizes über, so dass auch die Eckpunkte wieder in Eckpunkte übergehen.

Dies liefert hier:

$$L_1(P_1) \in \{A L_{\tau(i)}(P_k) + B_1; k = 0, \dots, 2m, i = 0, \dots, m\}.$$

Da $L_1(P_1)$ für $1 \neq 0$ genau die Dreiecksecken liefert und $L_0(S_a)$ (bzw. $L'_0(S_a)$) eine Sonderrolle spielt (vgl. 2.3 d), 2.4 b)) folgt genauer, (offenbar ist d) analog):

i) $A L_{\tau(0)}(S_a) + B_0 = L_0(S_a)$ (dasselbe gilt für L'_0), d.h. $\tau(0) = 0$ denn nur L_0 (und L'_0) kann höchsten $2m-2$ Eckpunkte von S_a (bzw. $S_{a,1}$) auf einen Punkt in $\mathbb{C}$ abbilden.

ii) Die ausgezeichnete Ecke $L_k(P_0) = 0$ kann nur auf die ausgezeichnete Ecke $L_{\tau(k)}(P_0)$ (bzw. $L'_{\tau(k)}(P'_0)$) gehen: dies liefert $B_1 = \dots = B_m = 0$.

Da alle übrigen $L_k(P_1)$ für $k = 1, \dots, m$ auf der Geraden $i\mathbb{R} - c$ (bzw. $L'_k(P'_1) \in i\mathbb{R} - c'$) liegen, folgt:

im Fall b) : $A = 1$

im Fall d) : $A \in \mathbb{R}_+, A \neq 0$.

Es sind also nur die Dreiecke $L_k(S_a)$ (und auch $L'_k(S_{a,1})$) auf identische Übereinstimmung (bzw. Homothetie) bzgl. $\tau \in \mathfrak{S}_m$ zu überprüfen für $k = 1, \dots, m$.

Fall b): Da $\text{Im}(\alpha_k) > 0$ und $c > 0$ folgt aus der Anordnung der Eckpunkte des Dreiecks:

$L_k(P_k) = L_{\tau(k)}(P_{\tau(k)})$ und deshalb folgt wegen ii) für den

andern Eckpunkt ($\neq 0$) des Dreiecks $L_k(S_a)$:

$$L_k(P_{m+k}) = L_{\tau(k)}(P_{m+\tau(k)})$$

Mit den eben verwendeten Bezeichnungen gelten die Gleichungen:

$$a^k = a^{\tau(k)} \quad \text{und} \quad a^k \alpha_k = a^{\tau(k)} \alpha_{\tau(k)} : \text{also muss } \alpha_k = \alpha_{\tau(k)} \\ \text{für } k = 1, \dots, m$$

Hieraus folgt offenbar wegen c) die Starrheit aller S_a gemäss b).
(Ausserdem sieht man, dass alle Automorphismen wie in c) für gewisse $a \in A_m$ definiert werden können, siehe auch Folgerung).

Fall d): Dies läuft ähnlich: Wie eben kann man schliessen:

$$a^k = L_k(P_k) = A L'_{\tau(k)}(P'_{\tau(k)}) = A \bar{a}^{\tau(k)}$$

$$a^k \alpha_k = L_k(P_{m+k}) = A L'_{\tau(k)}(P'_{m+\tau(k)}) = A \bar{a}^{\tau(k)} \bar{\alpha}_{\tau(k)}$$

(wobei $\bar{a}^1, \alpha_1, 1 = 1, \dots, m$ die entsprechenden Konstanten zu $S_{a'}$.)

Es folgt: $\alpha_k = \bar{\alpha}_{\tau(k)}$ für $k = 1, \dots, m$.

Für $a \neq a'$ kann aber dies wegen der (lexikalischen) Anordnung der Elemente von A_m (insbesondere wegen der Echtheitsbedingung (+)) nicht möglich sein.

Also gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildung von S_a in $S_{a'}$, für $a, a' \in A_m$ mit $a \neq a'$.

Die Aussage e) folgt einerseits aus 2.4 b) wegen Stufe $m+1$:

S ist zu einem S_a mit geeigneten $a \in A_m$ affin äquivalent, (für die Bedingung $\text{Im}(\alpha_k) > 0$ muss man eventuell mit $(\alpha_k)^{-1}$ noch die Koordinate z_k drehen).

Die Eindeutigkeit von a folgt aber wegen d).

Folgerung:

Sei $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in A_m, m \geq 2$.

Dann besitzt das Simplexgebiet S_a der Stufe $m+1$ genau die folgenden Automorphismen:

$$f_{\tau}: S_a \longrightarrow S_a \text{ mit } f_{\tau}(P_k) = P_{\tau(k)}, f_{\tau}(P_{m+k}) = P_{m+\tau(k)}$$

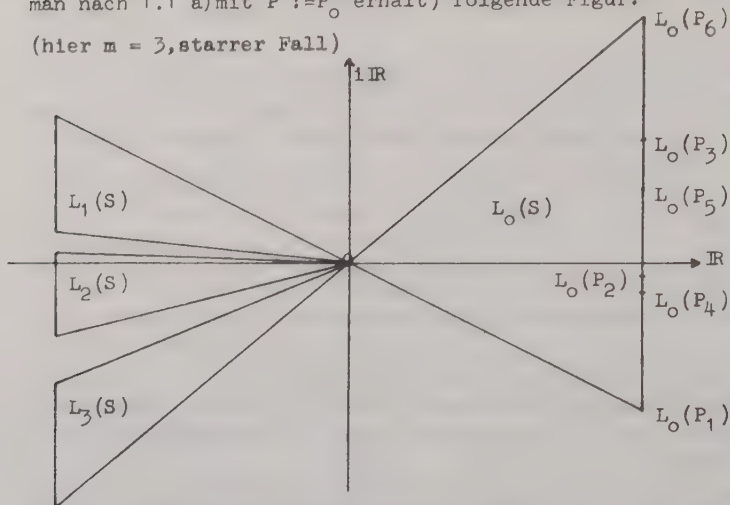
wobei $\tau \in \{\sigma \in S_m : a = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(m)})\}$

(dies ist offenbar die oben erwähnte Verschärfung von c)).

Damit sind die Automorphismen aller Simplexgebiete der Stufe $m+1$ in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ bestimmt, sowie genau die Bedingungen für Starrheit angegeben, die man gemäss 2.2 b) und 2.4 b) konkret durch Berechnung von reellen Stützfunktionen, Komplexifizierung und Wahl der so induzierten Koordinaten direkt ermitteln kann.

Man könnte die Aussage von 2.5 b), d) ohne Berufung auf Eigenschaften von Simplexes unter affinen Abbildungen erhalten. Denn ein jedes Simplexgebiet der Stufe $m+1$ in $\mathbb{C}^m$ liefert für gewisse globale affine Linearisierungen (die man nach 1.1 a) mit $P := P_0$ erhält) folgende Figur:

(hier $m = 3$, starrer Fall)



(bei nichtstarrten Simplexgebieten decken sich einige linke Linearisierungsdreiecke vollständig).

Bei allen Simplexgebieten in $\mathbb{C}^m$ der Stufe $m+1$ sieht die entsprechende Figur ähnlich aus:

nur $L_0(S)$ liegt im positiven Halbraum mit linker Spitze o und mit der Gegenseite, die die $\mathbb{R}$ -konvexe Hülle von $L_0(P_1), \dots, L_0(P_{2m})$ und parallel zu $1\mathbb{R}$ ist;

alle anderen Dreiecke $L_k(S), k = 1, \dots, m$ liegen im negativen Halbraum mit Spitze o derart, dass sie an o gespiegelte Teildreiecke von $L_0(S)$ sind; denn es folgt aus der Linearisierungsgleichung $L_0 + \dots + L_m = 0$ insbesondere: $L_k(P_1) = -L_0(P_1)$, $1 = k, m+k$
(für alle $k = 1, \dots, m$) $L_k(P_j) = 0$ sonst.

Mit elementaren geometrischen Überlegungen und vielen Fallunterscheidungen kann man dann auf $A = 1$ (bzw. $A \in \mathbb{R}_+^*$), $B_1 = \dots = B_m = 0$ schließen, so dass schliesslich nur noch Permutationen $\psi \in \mathfrak{S}_m$ übrigbleiben, wenn gewisse linke Dreiecke deckungsgleich (bzw. homothetisch) sind.

Die starren Simplexgebiete der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$ von [16], S.188 benutzt Eickel in [10] zur Konstruktion von starren Holomorphiegebieten mit glattem (bzw. unendlich oft differenzierbaren) Rand vom topologischen Typ der Hyperkugel:

es wird ein Glättungsprozess entwickelt, wobei die Ecken von starren Simplexgebieten der Stufe 3 mit (nicht komplex-analytischen) Flächen weggeschnitten werden, so dass ein pseudoanalytisches Polyedergebiet entsteht (vgl. III 1.6, 7).

Mit der höherdimensionalen Variante dieses Glättungsprozesses kann man mit den Simplexgebieten von 2.5 Familien starrer bzw. nicht eigentlich holomorph auf einander abbildbarer Holomorphiegebiete in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ mit glattem Rand und einfachen Zusammenhang erhalten.

2.6 Bemerkungen zu Simplexgebieten der Stufe $m+2$ in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$.

a) Nach Satz 2.4 b) lässt sich ein jedes Simplexgebiet der Stufe $m+2$ in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ mit Hilfe einer affinen Abbildung auf ein Simplexgebiet mit den Ecken $P_0 = 0, P_k = e_k$, sowie $P_{m+k} = \alpha_k e_k + \beta_k e_m$ für $k = 1, \dots, m$ abbilden, wobei

$\operatorname{Im}(\alpha_k) > 0 : k = 1, \dots, m$ sowie $\beta_k = 0$ für $1 < k \leq m$ und

$\beta_1 \in \mathbb{C}^\pm$ für $1 \leq 1 < m$ ($1 \leq 1$: sonst Stufe $m+1$; $1 < m$, klar)

Offenbar liegen P_0, P_m, P_{2m} auf der komplexen Geraden $\{\lambda e_m : \lambda \in \mathbb{C}\}$ ($(e_1, \dots, e_m)$ sei komplexe Basis von $\mathbb{C}^m$).

Begründung für $\operatorname{Im}(\alpha_k) > 0$ mit $k = 1, \dots, m$:

Die affine Abbildung, welche P_k und P_{m+k} vertauscht, liefert $\operatorname{Im}(\alpha_k) \geq 0$ für alle $k = 1, \dots, m$

Für reelle α_k rechnet man leicht nach, dass die Koordinate $\operatorname{Im}(z_k)$ von den Eckvektoren $v_1 = P_1 - P_0$ nicht erzeugt wird: $\bar{S}$ kein Simplex! Andererseits folgt aus $1 \geq 1$, dass die Geraden g_k durch die Punkte P_k, P_{m+k} (komplex natürlich!) nicht alle gleichzeitig durch ein und denselben Punkt $P \in \{0, P_m, P_{2m}\}$ für $k = 1, \dots, m-1$ laufen können, sonst würde (wegen 2.4) die Stufe gleich $m+1$ sein. Deshalb kann man die Eckpunkte in verschiedene Klassen unterteilen, je nachdem ob die Gerade $g_k, k = 1, \dots, m-1$ die Gerade λe_m trifft: in speziellen Eckpunkten $0, P_m, P_{2m}$ oder ausserhalb dieser. Für mögliche Automorphismen ist dies (aus affinen Gründen) sehr wichtig.

Offenbar ist also eine Untersuchung der Simplexgebiete von Stufe $m+2$ mit einer längeren Fallunterscheidung verbunden.

Es werden nun die wesentlichen Zerlegungsgewebe angegeben:

b) Sei S Simplexgebiet der Stufe $m+2$ in $\mathbb{C}^m, m \geq 2$ mit den eben angegebenen Eckpunkten $P_0, \dots, P_{2m}$.

Dann besitzt S nach 2.2 b) ein Minimalsystem $\exp \circ a_k$ für $k = 0, \dots, 2m$ mit affinen Funktionen $a_k, k = 0, \dots, 2m$

und es gilt insbesondere: (für festes l mit $1 \leq l \leq m-1$)

$da_1 \wedge da_{m+1} = 0$ und $a_1(P_j) = a_1(P_0)$ für $0 \leq j \leq 2m, j \neq 1, m+1$

Weitere Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den $a_k, 0 \leq k \leq 2m$ bestehen nicht. (Vgl. 2.3).

Somit definieren $a_0, \dots, a_m, a_{2m}$ ein affines Zerlegungssystem für S und jede m -elementige Auswahl $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ liefert affine Koordinaten für $\mathbb{C}^m$;

Somit induzieren diese Zerlegungsfunktionen $m+2$ wesentliche (affine) Zerlegungsgewebe

W_0 bzgl. den Funktionen $a_1, \dots, a_m, a_{2m}$;

W_j bzgl. den Funktionen $a_0, a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_m, a_{2m}$ für $j = 1, \dots, m-1$;

W_m bzgl. den Funktionen $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_{2m}$;

W bzgl. den Funktionen $a_0, a_1, \dots, a_m$;

welche wieder genau dieselben Funktionen (multipliziert mit gewissen zugeordneten Konstanten aus $\mathbb{C}^*$) als Linearisierungsfunktionen erhalten. Die Linearisierungsmengen dieser Gewebe sind Dreiecke, die vermöge Ähnlichkeiten aus den Mengen $a_0(S), a_1(S), \dots, a_m(S), a_{2m}(S)$ hervorgehen.

$a_j(S)$ ist Dreieck mit den Ecken $a_j(P_j), a_j(P_{m+j}), a_j(P_0) = a_j(P_1)$ (wobei $0 \leq l \leq 2m, l \neq j, m+j$) für $j = 1, \dots, m-1$.

Für die Dreiecke $a_0(S), a_m(S)$ und $a_{2m}(S)$ dürfen nie mehr als $2m-2$ Eckpunkte von S auf einen Eckpunkt der Dreiecke fallen.

Es folgt deshalb für affine Abbildungen von S auf sich (oder andere Simplexgebiete der Stufe $m+2$):

Die Zerlegungsgewebe W_0, W_m und W_{2m} können nur unter einander gewebetreu abgebildet werden und ebenso nur die $W_j, j = 1, \dots, m-1$.

Dies ist bei der Anwendung des Prinzips von 1.3 b), c) zur Untersuchung der Starrheit von S zu beachten, effektiv sind weniger Möglichkeiten für Automorphismen zu betrachten.

Ausserdem gibt es einen qualitativen Unterschied zwischen den Fällen $m = 2$ (auf den noch konkret eingegangen werden soll!) und $m > 2$ (hier ist an jeder Linearisierungsfigur immer ein

Linearisierungsdreieck beteiligt, bei dem $2m-1$ Ecken des Simplexes auf eine Dreiecksecke abgebildet werden).

Für $m > 2$ erhält man mit Hilfe von 1.1 a) spezielle affine Linearisierungen der wesentlichen Zerlegungsgewebe:

$$W : (S, A_0(a_0 - a_0(P_0)), \dots, A_{m-1}(a_{m-1} - a_{m-1}(P_0)), a_m - a_m(P_0))$$

$$W_0 : (S, A_1^0(a_1 - a_1(P_0)), \dots, A_m^0(a_m - a_m(P_0)), a_{2m} - a_{2m}(P_0))$$

$$W_m : (S, A_0^m(a_0 - a_0(P_0)), \dots, A_{m-1}^m(a_{m-1} - a_{m-1}(P_0)), a_{2m} - a_{2m}(P_0))$$

und für $j = 1, \dots, m-1$ (wobei $\hat{}$ weglassen bedeutet)

$$W_j : (S, A_0^j(a_0 - a_0(P_0)), \dots, \hat{a}_j, \dots, A_m^j(a_m - a_m(P_0)), a_{2m} - a_{2m}(P_0))$$

mit gewissen Konstanten $A_0, \dots, A_m^j \in \mathbb{C}^*$.

Bei Überlegungen hinsichtlich Starrheit oder eigentlich holomorphen Abbildungen in weitere Simplexgebiete der Stufe $m+2$ (gemäß dem Prinzip von 1.3 c)) werden Dreiecke, die von a_0, a_m, a_{2m} herrühren, untereinander ähnlich sein müssen, wie auch einige der von $a_1, \dots, a_{m-1}$ untereinander homothetisch sein müssen; dies folgt wie in 2.5.

Folglich ist S bestimmt dann starr, wenn die Dreiecke $a_0(S), a_m(S), a_{2m}(S)$ paarweise nicht ähnlich und die Dreiecke $a_j(S) - a_j(P_0)$ für $j = 1, \dots, m-1$ alle paarweise nicht mit Drehungen $A \in \mathbb{C}^*$ nichttrivial zur Deckung gebracht werden können (dh. $a_j(S) - a_j(P_0) \neq A(a_1(S) - a_1(P_0))$ für alle $A \in \mathbb{C}^*$ und alle $1 \leq j, 1 \leq m-1, 1 \neq j$)

Die Linearisierungsfiguren sind ziemlich kompliziert:

bei den $W_j, j = 1, \dots, m-1$ sind $m-2$ spezielle Dreiecke mit Spitze o (und so dass $2m-1$ Simplexeckpunkte auf o fallen) beteiligt, sowie 3 Dreiecke (bzgl. a_0, a_m, a_{2m}), deren "Hauptseite" (auf der die Bilder von $2m$ Eckpunkten liegen) durch den Punkt o läuft.

Bei den übrigen Geweben W_0, W_m, W sind $m-1$ spezielle Dreiecke mit Spitze o und nur 2 Dreiecke mit "Hauptseite" durch o beteiligt.

S besitzt genau dann Automorphismen, wenn sich einige spezielle Dreiecke genau decken und die Punkte P_0, P_m und P_{2m} bei den entsprechenden affinen Vertauschungen f_τ (für geeignete $\tau \in \mathfrak{S}_{m-1}$) noch affin auf-einander abgebildet werden können (dh. identisch oder vermöge einer Drehung).

Eine genauere Untersuchung wird hier nicht ausgeführt, um den Modulraum der Simplexgebiete von Stufe $m+2$ zu bestimmen.

Nach diesen etwas zu allgemeinen Bemerkungen soll der Fall $m = 2$ dargestellt werden.

2.7 Lemma

a) Jedes Simplexgebiet der Stufe 4 in $\mathbb{C}^2$ ist zu einem Simplexgebiet mit den folgenden Eckpunkten affin äquivalent:
 $P_0 = 0, P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (\alpha_1, 0), P_4 = (\beta, \alpha_2)$

wobei $(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in \mathbb{C}^3$ mit $\text{Im}(\alpha_k) > 0, k = 1, 2$ und $\beta \neq 0$

b) Jedes Simplexgebiet der Stufe 4 in $\mathbb{C}^2$ ist auf ein Simplexgebiet S_b mit den folgenden Eckpunkten affin abbildbar:
 $P_0 = (\beta, 0), P_1 = (1, 0), P_2 = (0, 1), P_3 = (\alpha_1, 0), P_4 = (0, \alpha_2)$

wobei $b = (\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in \mathbb{C}^3$ mit $\text{Im}(\alpha_1) > 0, 0 < |\beta| \leq |\alpha_2| \leq 1, \alpha_2 \neq \beta$

c) Jedes Simplexgebiet S der Stufe 4 in $\mathbb{C}^2$ besitzt ein Minimalsystem $\exp \circ a_k, k = 0, \dots, 4$ mit affinen Funktionen $a_0, \dots, a_4$, so dass gilt:

$$da_2 \wedge da_4 = 0 \text{ und } a_2(P_0) = a_2(P_1) = a_2(P_3)$$

und keine Abhängigkeit zwischen a_0, a_1 bzw. a_0, a_2 bzw. a_0, a_3 bzw. a_1, a_2 bzw. a_1, a_3 bzw. a_2, a_3 vorliegt;

also ist a_0, a_1, a_2, a_3 ein affines Zerlegungssystem für S .

d) Die Zerlegungsgewebe eines Simplexgebietes S mit einem Zerlegungssystem a_0, a_1, a_2, a_3 , wie in c), sind affin und haben folgende affine Linearisierungen:

$$\begin{aligned} & (S, A_1^0(a_1 - a_1(P_0)), A_3^0(a_3 - a_3(P_0)), a_2 - a_2(P_0)) \text{ für } W_0 \\ - & (S, A_0^1(a_0 - a_0(P_0)), A_3^1(a_3 - a_3(P_0)), a_2 - a_2(P_0)) \text{ für } W_1 \\ & (S, A_0^2(a_0 - a_0(P_2)), A_1^2(a_1 - a_1(P_2)), a_3 - a_3(P_2)) \text{ für } W_2 \\ & (S, A_0^3(a_0 - a_0(P_3)), A_1^3(a_1 - a_1(P_3)), a_2 - a_2(P_3)) \text{ für } W_3 \\ & \text{mit } A_1^0, A_3^0, A_0^1, A_3^1, A_0^2, A_1^2, A_0^3, A_1^3 \in \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

W_2 nimmt Sonderstellung ein und ist aus den anderen leicht zu berechnen; W_0, W_1, W_3 haben folgende Linearisierungsfiguren (Skizze für einen starren Fall siehe nächste Seite) wobei die Linearisierungen für W_1 kurz mit (S, L_1^1, L_k^1, L_2) für $\{1, l, k\} = \{0, 1, 3\}$ notiert werden sollen.

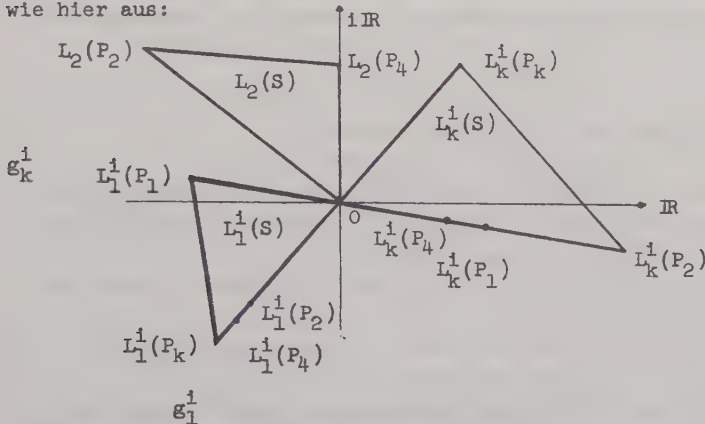
$L_2(S)$ ist ein (offenes) Dreieck im negativen Halbraum mit den Ecken 0 und $L_2(P_4)$ auf $i\mathbb{R}$ und $\text{Re}(L_2(P_2)) < 0$, für W_0, W_1, W_3 . Die anderen beiden Dreiecke $L_1^1(S)$ und $L_k^1(S)$ von $W_1, i = 0, 1, 3$ haben folgende Eigenschaften:

$$L_1^1(P_1) + L_k^1(P_1) = 0, \quad L_1^1(P_k) + L_k^1(P_k) = 0, \quad L_1^1(P_1) = L_k^1(P_1) = 0$$

Dh. Die Punkte $L_1^1(P_j), j \neq 1$ liegen auf der Geraden g_1^1 durch 0 und $L_k^1(P_k)$

Analog liegen $L_k^1(P_j), j \neq k$ auf der Geraden g_k^1 durch die Punkte o und $L_1^1(P_1)$.

Konkret sehen die Linearisierungsfiguren (abgesehen davon, dass $L_2(S)$ bzw. $L_1^1(S)$ und $L_k^1(S)$ nach unten gekippt sein können) wie hier aus:



Dies alles folgt sofort aus den entsprechenden Linearisierungsgleichungen für w_1 mit $\{i, l, k\} = \{o, 1, 3\}$ (mit einer gewissen zyklischen Anordnung $(i, l), (k, l), (l, k).$)

Beweis von Lemma 2.7:

a) folgt sofort nach Satz 2.4, Lemma 2.3 und den Bemerkungen 2.6. Es muss sogar genauer gelten:

die Gerade durch P_2 und P_4 muss die Gerade durch P_0, P_1, P_3 treffen (sonst wäre kein echtes Simplex durch $P_0, \dots, P_4$ gegeben, wie man leicht mit den kanonischen reellen Koordinaten aus der Determinante von $P_1, \dots, P_4$ nachrechnet), aber der Schnittpunkt darf nicht einer der Punkte P_0, P_1, P_3 sein, sonst wäre das Simplexgebiet von Stufe 3 statt von Stufe 4: es muss genau gelten: $\beta(1 - \alpha_2)^{-1} \neq 1, \alpha_1, \beta$.

b) Man bestimmt die affine Abbildung mit

$$(o, o) \mapsto S, (1, o) \mapsto (1, o), (o, 1) \mapsto (o, 1)$$

wobei $S = (\beta(1 - \alpha_2)^{-1}, o)$ Schnittpunkt der Geraden durch P_0, P_1, P_3 mit der Geraden durch P_2 und P_4 ist.

Damit ergibt sich die Darstellung b) für Simplexgebiete der Stufe 4 aus a).

c) nach 2.2 b) wegen Stufe 4 und 2.3 c).

d) ist klar wegen c) und 1.1 a): spezielle Linearisierung bzgl. P_1 .

Einige Bemerkungen zu den wesentlichen Zerlegungsgeweben von Simplexgebieten S_b (mit $b = (\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ wie in 2.7 b)) sowie ihren Linearisierungsfiguren hinsichtlich ihres Verhaltens unter Automorphismen von S_b .

a) Nach 1.3 a) ist jeder Automorphismus affin, denn er induziert gewebetreue Abbildungen zwischen der Zerlegungsgeweben:
 $f_1: W_1 \longrightarrow W_{\sigma(1)}$ für eine gewisse Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$

Da alle $W_{1,i} = 0, 1, 2, 3$ affin sind folgt nach II 1.6, 7:

Jedes f_1 ist affin und $f = f_1$ ebenfalls.

b) Aus 2.3 c) folgt, da f affin ist, dass die Punkte P_0, P_1, P_3 und ihre Bildpunkte wieder auf einer Geraden liegen; da aber aus affinen Gründen Eckpunkte nur in Eckpunkte übergehen können, müssen die Punkte nur untereinander vertauscht werden. Insbesondere folgt noch, dass P_2 und P_4 höchstens vertauscht werden können.

c) Dies hat folgende Konsequenz für die Gewebeabbildungen:

f_2 kann das Gewebe W_2 nur auf W_2 abbilden.

Somit können W_0, W_1, W_3 nur untereinander abgebildet werden.

(dh. $\sigma(i) \in \{0, 1, 3\}$ für $i = 0, 1, 3$)

Anwendung des Prinzips von 1.3 c) liefert:

Zu einem Automorphismus f von S_b gibt es (mit $\{i, l, k\} = \{0, 1, 3\}$)

$(A^1, B_1^1, B_k^1) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, so dass mit $B_2^1 := -B_1^1 - B_k^1$ gilt:

$$L_{\sigma(j)}^{\sigma(i)}(S_b) = A^1 L_j^1(S_b) + B_j^1 \quad \text{mit } j = 1, k, 2$$

Aber, da $L_2^1(P_0) = L_2^1(P_1) = L_2^1(P_3) = 0$ ist, und bei keiner anderen Menge $L_1^1(S_b), L_k^1(S_b)$ drei Simplexecken auf eine Dreiecksecke fallen, muss $f_1, i = 0, 1, 3$ das Dreieck $L_2^1(S_b)$ nur mit sich in Beziehung setzen, dh. $L_2^1(S_b)$ geht genau auf $L_2^{\sigma(i)}(S_b)$:
 $A^1 = 1$ und $B_2^1 = 0$ (da die Ecke 0 nur auf sich gehen kann!)

Die anderen Dreiecke $L_l^1(S_b), L_k^1(S_b)$ gehen kongruent auf die Dreiecke $L_{\sigma(j)}^{\sigma(i)}(S_b), j = 1, k$: identisch (mit $B_1^1 = B_k^1 = 0$), oder mit einer Verschiebung um $B_1^1, -B_1^1 \neq 0$.

Aber dabei müssen die Gerade g_1^1 und die Gerade g_k^1 in die zugeordneten Geraden übergehen:

Da aber beide Geraden durch 0 laufen und verschieden sind, (sonst keine echten Dreiecke $L_1^1(S_b)$ bzw. $L_k^1(S_b)$ vorhanden!) müssten B_1^1 und B_k^1 genau in die Geradenrichtungen verschieben! Also ist nur der identische Fall möglich:

die Dreiecke (bzw. Figuren) müssen sich decken; zyklisches Vertauschen von P_0, P_1 und P_3 nur möglich.

2.8 Satz (Über die Simplexgebiete der Stufe 4 in $\mathbb{C}^2$)

Es bezeichne B die folgende Menge in $\mathbb{C}^3$:

$$\{(\alpha_1, \alpha_2, \beta) : \operatorname{Im}(\alpha_1) > 0, 0 < |\beta| \leq |\alpha_2| \leq 1 \text{ so dass gilt:} \\ \text{falls } |\beta| = |\alpha_2| = 1 \text{ dann } \alpha_2 = e^{2i\pi/3}, \beta = e^{4i\pi/3}; \\ \text{falls } |\beta| < |\alpha_2| = 1, \text{ so ist } 0 < \arg(\alpha_2) < \pi \text{ bzw.} \\ \text{für } \arg(\alpha_2) = \pi \text{ ist } 0 < \arg(\beta) < \pi; \\ \text{falls } |\beta| = |\alpha_2| < 1, \text{ so ist } 0 < \arg(\alpha_2) < \arg(\beta) \\ \text{bzw. für } \arg(\alpha_2) = 0 \text{ ist } \arg(\beta) \neq \pi \}$$

Dann gilt:

- Für jedes $b = (\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in B$ definieren die "Eck"punkte $P_0 := (0, \beta)$, $P_1 := (1, 0)$, $P_2 := (0, 1)$, $P_3 := (\alpha_1, 0)$, $P_4 := (0, \alpha_2)$ ein Simplexgebiet S_b der Stufe 4 in $\mathbb{C}^2$.
- Jedes S_b mit $b = (\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in B$ und $(\alpha_2, \beta) \neq (e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3})$ ist starr.
- $(S_b : b = (\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in B)$ ist eine Familie von Simplexgebieten, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können.
- Jedes Simplexgebiet S der Stufe 4 in $\mathbb{C}^2$ ist genau zu einem Simplexgebiet S_b (sogar affin) äquivalent.
(Dh. B ist der Modulraum aller Simplexgebiete der Stufe 4 in $\mathbb{C}^2$)

Beweis: a) Wie man leicht nachrechnet ist $\bar{S}_b$ genau dann ein

Simplex in $\mathbb{R}^4$, wenn für $b = (\alpha_1, \alpha_2, \beta)$ gilt:

$\alpha_2, \beta, 1$ definieren in $\mathbb{C}$ ein echtes Dreieck, dies folgt, wenn man die reellen Eckvektoren $v_k := P_k - P_2$ mit $k = 0, 1, 3, 4$ auf $\mathbb{R}$ -lineare Unabhängigkeit überprüft.

Diese Bedingung ist nach Wahl der Elemente von B immer erfüllt. S_b ist von Stufe 4, da höchstens einmal 3 Simplexecken auf einer komplexen Geraden liegen (nach 2.3, 2.4 und 2.6).

b) Die Linearisierungsfiguren der Gewebe W_0, W_1, W_3 von 2.7 legen nahe, dass nur Automorphismen möglich sind, die die Punkte P_2, P_4 festlassen und die anderen zyklisch permutieren. Präzis gilt:

Sei $f : S_b \longrightarrow S_b$ ein Automorphismus, dann sind Gewebeabbildungen induziert; da alle Gewebe affin sind, folgt nach 1.3 a); f ist Beschränkung einer affinen Abbildung $a : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$.

Affine Abbildungen führen Geraden in ebensolche über, so dass die Schnittpunkte von Geraden in die Schnittpunkte ihrer Bildgeraden, sowie die Simplexes in Simplexes übergehen.

Da die Punkte P_2, P_4 eine Gerade g, und die Punkte P_0, P_1, P_3 eine Gerade h definieren mit Schnittpunkt o, folgt:

es gibt keine weitere Gerade durch drei verschiedene Ecken des Simplexgebiets S_b . Da $f(S_b) = S_b$ und die Bilder der Eckpunkte von S_b wieder Eckpunkte von S_b sind, muss gelten:

$f(g) = g$ und $f(h) = h$ sowie $f(o) = o$ (da Schnittpunkt von g mit h)

Da $\text{Im}(\alpha_1) > 0$ folgt: $f(P_2) = P_2$ und $f(P_4) = P_4$.

Ausserdem müssen die Punkte P_0, P_1, P_3 untereinander abgebildet werden: f , eingeschränkt auf die Gerade h , liefert eine Ähnlichkeitsabbildung von h auf h , die das von P_0, P_1, P_3 bestimmte Dreieck mit den Ecken $\alpha_2, \beta, 1$ auf sich abbildet.

Nach Definition von B ist dies nur genau dann möglich, wenn

$(\alpha_2, \beta) = (e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3})$, (dh. ein gleichseitiges Dreieck):

da 1 eine Ecke ist; o auf o gehen muss, und die Bedingungen in B alle Vertauschungsmöglichkeiten von $1, \alpha_2, \beta$ ausgeschlossen haben (durch Anordnung dieser Konstanten).

Also folgt die Aussage b).

Die übrigen Simplexgebiete S_b mit $b \in B$, so dass die Punkte P_0, P_1, P_3 ein gleichseitiges Dreieck bestimmen, lassen offenbar genau die Automorphismen

$$(z, w) \longmapsto (z, e^{2i\pi/3} w),$$

$$(z, w) \longmapsto (z, e^{4i\pi/3} w), \text{ sowie die identische Abbildung zu,}$$

es werden also die Punkte P_0, P_1, P_3 zyklisch permutiert.

c) Dies folgt mit genau denselben Überlegungen, lediglich muss schliesslich überlegt werden, ob die induzierten Dreiecke vermöge einer Ähnlichkeit auf-einander (wenn $\alpha_1 = \alpha'_1$, sonst klar) abgebildet werden können:

dies geht nicht: da B so definiert ist, dass alle induzierten Dreiecke mit $(\alpha'_2, \beta') \neq (\alpha_2, \beta)$ verschieden sein müssen!

d) Dies folgt sofort aus Lemma 2.7 b) und aus dem eben gezeigten c): Jedes Simplexgebiet S der Stufe 4 ist vermöge einer affinen Abbildung zu einem S_b äquivalent (wobei durch etwaige Drehungen die Bedingungen von B hergestellt werden können); nach c) sind alle diese S_b untereinander eigentlich holomorph verschieden, deshalb ist S_b eindeutig bestimmt.

Schlussbemerkung:

Die Simplexgebiete der Stufe 3 sind durch zwei Geraden bestimmt auf denen je drei Simplexecken liegen, und die ebenfalls ein echtes Dreieck jeweils bestimmen, so dass beide Dreiecke eine gemeinsame Ecke besitzen, (denn die Geraden schneiden sich in dieser).

Die Simplexgebiete der Stufe 4 kann man als eine "Störung" der Simplexgebiete der Stufe 3 auffassen:
alle 5 Ecken dieser Simplexgebiete liegen auf genau zwei komplexen Geraden, die sich schneiden;
dieser Schnittpunkt ist bei Stufe 3 ein Eckpunkt; bei Stufe 4 nie!

Für die Modulräume B, A_2 bedeutet dies:
wenn β gegen 0 geht, für $b = (\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in B$, so approximieren die S_b der Stufe 4 ein Simplexgebiet S_a der Stufe 3 für ein bestimmtes $a = (\alpha_1', \alpha_2')$, wobei das (α_1', α_2') von (α_1, α_2) abhängt. (Abgesehen von gewissen Ausartungen wie $\arg(\alpha_2) = \pi$ usw.).
Jedes $S_a, a \in A_2$ kann so mit nicht äquivalenten S_b (vgl. 2.8 c)), mit einer komplex 2-parametrischen Schar von starren Simplexgebieten der Stufe 4 (wenn man lokal $\beta \in U(0)$ und $\alpha_2 \in U(a_2^*)$ mit geeignetem $a_2^* = a_2^*(a)$ aus dem punktierten Einheitskreis variiert) approximieren.

2.9 Bemerkung (Geometrische Charakterisierung der Stufen in $\mathbb{C}^2$)

Sei S ein Simplexgebiet in $\mathbb{C}^2$ mit den Ecken $P_0, \dots, P_4$.

Dann gilt:

a) S ist genau dann von Stufe 3, falls gilt:

es gibt zwei komplexe Geraden g und h , so dass:

$$g \cap h \in \{P_0, \dots, P_4\} \subset g \cup h$$

b) S ist genau dann von Stufe 4, falls gilt:

es gibt zwei komplexe Geraden g und h , so dass:

$$g \cap h \notin \{P_0, \dots, P_4\} \subset g \cup h$$

c) S ist genau dann von Stufe 5, falls gilt:

es gibt keine zwei komplexe Geraden g und h mit

$$\{P_0, \dots, P_4\} \subset g \cup h$$

(Dies folgt offenbar aus 2.3 und 2.4).

Beispiele:

S_3 mit den Ecken $(0,0), (1,0), (1,0), (0,1), (0,1/2)$ ist ein starres Simplexgebiet der Stufe 3.

S_4 mit den Ecken $(1,0), (1,0), (0,1), (0,-1), (0, (1+i)/2)$ ist ein starres Simplexgebiet der Stufe 4.

S_5 mit den Ecken $(1,0), (1,0), (0,1), (0,1), (1,1)$ ist ein nichtstarres Simplexgebiet der Stufe 5 (wegen $(z,w) \mapsto (w,z)$).

Die Punkte $(1,0), (1,0), (0,1), (0,1/2), (1,1)$ definieren ein Simplexgebiet der Stufe 5.

2.1o Technische Aussage über Simplexgebiete der Stufe 5 in $\mathbb{C}^2$

Jedes Simplexgebiet S der Stufe 5 in $\mathbb{C}^2$ ist zu einem der folgenden Simplexgebiete $S_{a,b,c,d}$ von Stufe 5 affin äquivalent, so dass gilt:

- a) $S_{a,b,c,d}$ ist Simplexgebiet mit den Eckpunkten $P_1 := (1,0)$, $P_2 := (a,0)$, $P_3 := (0,1)$, $P_4 := (0,b)$, $P_0 := (c,d)$
- b) Für die Konstanten $a,b,c,d \in \mathbb{C}^*$ gilt:
 $0 \leq \operatorname{Im}(a) \leq \operatorname{Im}(b)$, (Normierung vermöge affinen Drehungen)
 $c + d \neq 1$, $c/a + d \neq 1$, $c + d/b \neq 1$, $c/a + d/b \neq 1$ (Stufe 5)
 $\operatorname{Im}(a)(\operatorname{Im}(b) \cdot \operatorname{Re}(d) - \operatorname{Re}(b) \cdot \operatorname{Im}(d)) + \operatorname{Im}(b)(\operatorname{Im}(a) \cdot \operatorname{Re}(c) - \operatorname{Re}(a) \cdot \operatorname{Im}(c)) +$
 $+ \operatorname{Im}(a) \operatorname{Im}(d) - \operatorname{Im}(a) \cdot \operatorname{Im}(b) + \operatorname{Im}(b) \cdot \operatorname{Im}(c) \neq 0$
 (Bedingung dafür, dass $P_0, \dots, P_4$ definieren Simplex in $\mathbb{R}^4$)
- c) Offenbar sind alle Simplexgebiete $S_{a,a,c,c}$ (mit $a, c \in \mathbb{C}^*$) bzgl. $((z,w) \mapsto (w,z))$ symmetrisch und nicht starr.

Beweis: S sei Simplexgebiet der Stufe 5 mit den Ecken $Q_0, \dots, Q_4$.

Seien R_{kl}^{ij} mit $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$ die (projektiven) Schnittpunkte der Geraden g_{ij} durch P_i, P_j mit der Geraden g_{kl} durch P_k, P_l . Man kann sich leicht überlegen, dass höchstens einer dieser drei Punkte R_{kl}^{ij} im Unendlichen liegt, also mindestens zwei dieser Schnittpunkte liegen in $\mathbb{C}^2$.

Durch entsprechende Ummumerierung $Q_i' := Q_{\tau(1)}$ für ein $\tau \in \mathfrak{S}_4$ kann man erreichen, dass die Geraden durch die Punkte Q_1', Q_2' und Q_3', Q_4' sich in $\mathbb{C}^2$ schneiden, im Punkt T .

Durch die Zuordnung $T \mapsto (0,0)$, $Q_1' \mapsto (1,0)$, $Q_3' \mapsto (0,1)$ wird eine affine Abbildung definiert, die das Simplexgebiet S auf ein Simplexgebiet S' mit den Ecken $(1,0)$, $(a',0)$, $(0,1)$, $(0,b')$ und (c',d') abbildet. Durch eventuelle affine Vertauschung von Q_1' mit Q_2' (bzw. Q_3' mit Q_4') kann man annehmen, dass $0 \leq \operatorname{Im}(a'), \operatorname{Im}(b')$ gilt, vermöge $(z,w) \mapsto (w,z)$ kann noch $\operatorname{Im}(a') \leq \operatorname{Im}(b')$ erreicht werden.

Die restlichen Bedingungen erhält man, wenn man die reelle Unabhängigkeit der Vektoren $v_k := P_k - P_0$ nachrechnet.

Wegen 2.9 muss man noch ausnehmen, dass P_0 nicht auf irgendwelchen Geraden durch je zwei verschiedene Ecken ($\neq P_0$) liegt. Offenbar folgt:

Wenn $P_0 = (c,d)$ und c (oder d) geht gegen 0, so approximiert die entsprechende Folge von Simplexgebieten der Stufe 5 ein Simplexgebiet der Stufe 4; gehen c, d beide gegen 0, so von Stufe 3.

§3 Einige Scharen von Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ mit nichtlinearen Zerlegungsgeweben

In diesem Paragraphen werden konkrete Beispiele von starren Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ mit nichtlinearen Zerlegungsgeweben mit einigen ihrer Invarianten berechnet. Wie am Ende von Kapitel I schon erläutert wurde (vgl. Satz I 2.10), werden Eigenschaften der Bildmengen der Invariantenfunktionen (wie Beschränktheit, Konstanz) benutzt um auf die (Nicht-) Existenz von gewebetreuen bzw. eigentlich holomorphen Abbildungen zu schliessen.

Speziell werden Polyedergebiete der Stufe 3 angegeben, deren nichtlineare Zerlegungsgewebe eine konstante Invariantenfunktion liefern; man kann dann eine diskrete Schar von paarweise nicht eigentlich aufeinander abbildbaren Polyedergebieten aufstellen.

Ausserdem sollen einige Beispiele von Polyedergebieten mit Zerlegungsgeweben von Typ (I) und (II) konstruiert werden, es werden u.a. solche mit einer beschränkten Invariantenfunktion angegeben und mit ihrer Hilfe wieder Scharen von nicht eigentlich holomorph aufeinander abbildbare Polyedergebiete mit nichtlinearen Zerlegungsgeweben definiert.

Wie bereits in Kapitel III §2 bemerkt, sind die Zerlegungsgewebe von Polyedergebieten im $\mathbb{C}^2$ nicht eindeutig festgelegt, es müssen immer Permutationen $\tau \in \mathfrak{S}_3$ bei Überlegungen mit Hilfe der Zerlegungsgewebe berücksichtigt werden; hierbei ist das Lemma I 1.10 (über konstante Invarianten) nützlich, zum andern wird konkret die Tabelle III 2.6 gebraucht.

3.1 Lemma

Die holomorphen Funktionen

$$f_1(z, w) := z, \quad f_2(z, w) := w, \quad f_3(z, w) := z^r + z^s w$$

auf $\mathbb{C}^2$ definieren für alle $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r \neq s$ die folgenden meromorphen nichtlinearen Gewebe

$$W_{r,s} := (\mathbb{C}^2, -(rz^{r-1} + sz^{s-1}w)dz, -z^s dw, d(z^r + z^s w))$$

und es gilt:

a) $W_{r,s}$ ist von Typ (I).

b) Die ersten Halbinvarianten K, K_1, K_2 von $W_{r,s}$:

$$K = -r(s-r)z^{r-3}(rz^{r-1} + sz^{s-1}w)^{-3} \quad (\neq 0 \rightarrow W_{r,s} \text{ nichtlinear})$$

$$K_1 = rs^2(s-r)z^{r-4}(rz^{r-1} + sz^{s-1}w)^{-4}$$

$$K_2 = rs(s-r)^2(2rz^{2r-5} - sz^{r+s-5}w)(rz^{r-1} + sz^{s-1}w)^{-5}$$

c) Die ersten Invarianten $I_1 := K_1^2 K_2^{-3}$, $I_2 := K_2^2 K_1^{-3}$

sowie $I := K_1 K_2 K^{-3}$ errechnen sich wie folgt:

$$I_1 = s^4(r-s)^{-1} + s^5r^{-1}(r-s)^{-1}z^{s-r}w$$

$$I_2 = s^2(r-s)r^{-1}(2r - sz^{s-r}w)^2(r + sz^{s-r}w)^{-1}$$

$$I = -2s^3 + s^4r^{-1}z^{s-r}w$$

d) $W_{r,s}$ besitzt folgende speziellen Invarianten:

$$J_0 := I_1 + s(s-r)^{-1} I = 3s^4(r-s)^{-1} \text{ (dh. } J_0 \text{ ist konstant!)}$$

$$J_1 := rs^{-4}(I + 2s^3) = z^{s-r}w$$

(da $W_{r,s}$ von Typ (I) ist, ist J_1 eine einfache wesentliche Invariante, von der alle anderen analytisch abhängig sind).

Beweis: Da $r, s \neq 0$ sind, ist $W_{r,s}$ sicher meromorphes Gewebe.

Die Berechnung der Halbinvarianten geht so, wie im Beispiel nach Lemma I 1.4 angegeben, (vgl. auch III §2 Lemma 2.1 a))

Damit erhält man die angegebenen Formeln, aus denen sofort c) und d) folgen:

$W_{r,s}$ besitzt nicht identisch verschwindendes K und ist also nichtlineares meromorphes Gewebe mit einer konstanten Invariantenfunktion J_0 , die in einem gewissen Sinn (vgl. I 1.10) eindeutig ist, da die Invariante $J := K_1 K_2^{-1}$ nichtkonstant ist.

a) $W_{r,s}$ ist von Typ (I).

Für einen Punkt $P = (z_0, w_0)$ mit $P \neq (0,0)$ gibt es eine Schar lokaler gewebetreuer Abbildungen

$$f_\varphi : (z, w) \longmapsto (e^{i\varphi}z, e^{i(r-s)\varphi}w) =: P', \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \varphi \neq \varphi'$$

so dass P' entlang eines Pfades durch P wandert:

nach der Folgerung II 2.10 muss $W_{r,s}$ dann von Typ (I) sein.

J_1 ist offenbar eine wesentliche Invariante, von der alle andern analytisch abhängen müssen (nach Definition von Typ (I) (s. II 2.2)).

Im Folgenden werden zu jedem $q = rs^{-1} \in \mathbb{Q}_+ \cap]0, \frac{1}{2}[$

Polyedergebiete mit Zerlegungsgeweben $W_{r,s}$ und der konstanten Invarianten $J_q = 3s^4(r-s)^{-1}$ definiert, die nicht paarweise eigentlich holomorph aufeinander abgebildet werden können, da die konstanten Invarianten nicht zu einander passen.

3.2 Satz

a) Sei $q = rs^{-1} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$ (dh. $0 < r < s; r, s \in \mathbb{N}$ teilerfremd).
Dann definiert die Menge

$$P_q := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| < 1, |w| < 1, |z^r + z^s w| < 1\}$$

ein Polyedergebiet der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$.

P_q ist ein Cartanscher Körper (genauer ein $(1, r-s)$ -Bereich).

b) $(P_q; q = rs^{-1} \in \mathbb{Q} \cap]0, \frac{1}{2}[)$ definiert eine Familie von Polyedergebieten der Stufe 3 (und Cartanschen Körpern), die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können.

Beweis: a) P_q ist Polyedergebiet der Stufe 3 und $(1, r-s)$ -Bereich:

Für jedes $\varphi \in [0, 2\pi[$ induziert die Abbildung

$$f_\varphi : (z, w) \longmapsto (e^{i\varphi} z, e^{i(r-s)\varphi} w)$$

einen Automorphismus von P_q , also ist P_q ein $(1, r-s)$ -Bereich.

Es ist noch zu zeigen, dass $z, w, z^r + z^s w$ ein Minimalsystem für P_q definieren und die Mengen

$$\partial_1 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| = 1\} \cap P_q$$

$$\partial_2 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |w| = 1\} \cap P_q$$

$$\partial_3 := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z^r + z^s w| = 1\} \cap P_q$$

topologisch von reeller Dimension 3 sind, (s. a. III 1.2 b)!)

Das erstere folgt leicht mit $(1, -1/2) \in \partial_1; (0, e^{i\varphi}) \in \partial_2$ für $\varphi \in [0, 2\pi[$ sowie $(t_1^* e^{i\psi/r}, t_2^* e^{i(r-s)\psi/r}) \in \partial_3$ für beliebige $t_2 \in]0, 1[$ und $\psi \in [0, 2\pi[$ und dem durch die Gleichung

$$t_1^r + t_1^s t_2 = 1 \quad \text{eindeutig bestimmten } t_1^* \in]0, 1[.$$

Berechnung der Mengen $\partial_i, i = 1, 2, 3$:

Mit den Bezeichnungen

$$a \cdot E(b) := \{t \in \mathbb{C}; |t - b| < a\} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{C} \quad (E := 1 \cdot E(0))$$

$$K_a(b) := \{t \in \mathbb{C}; |t - b| = a\} \quad \text{sowie } a \bar{E}(b) = a E(b) \cup K_a(b)$$

berechnet man:

$$\begin{aligned} \partial_1 &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z| = 1, w \in \bar{E}, z^r + z^s w \in \bar{E}\} \\ &= \{(e^{i\varphi}, w) \in \mathbb{C}^2; \varphi \in [0, 2\pi[; w \in \bar{E} \cap \bar{E}(-e^{-1(r-s)\varphi})\} \end{aligned}$$

(Denn mit $z = e^{i\varphi}$ ist $z^r + z^s w \in \bar{E}$ genau dann, falls

$$e^{ir\varphi} + e^{is\varphi} w \in \bar{E} \quad \text{bzw.} \quad w \in \bar{E}(-e^{-1(r-s)\varphi})$$

Damit ist ∂_1 klar. Für ∂_2 ergibt sich:

$$\partial_2 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |w| = 1, z \in \bar{\mathbb{E}}, z^r + z^s w \in \bar{\mathbb{E}}\} \\ = A^1 \cup \dots \cup A^{s-r} \cup (\{0\} \times K_1(0))$$

wobei für $k = 1, \dots, s-r$ mit A^k folgende Mengen bezeichnet seien:

$$A^k = \{(z, e^{i\psi}) \in \mathbb{C}^2 : \psi \in [0, 2\pi[; z \in (K_R(0) \cap a \bar{\mathbb{E}}(-e^{-1}(\psi/(s-r) + 2k\pi))) \\ R \in]0, 1[\\ (\text{mit } a := (R)^{\frac{r}{r-s}})\}$$

(Denn es gilt für festes $R \in]0, 1[$ und festgehaltene $\psi \in [0, 2\pi[$

$$\{z = R e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi[; z^r + z^s e^{i\psi} \in \bar{\mathbb{E}}\} \\ = \{R e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi[; R^r + R^s e^{i(s\varphi + \psi)} \in \bar{\mathbb{E}}\} \\ = \{R e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi[; R^{s-r} e^{i(s-r)\varphi} \in R^{-r} \bar{\mathbb{E}}(-e^{-i\psi})\} \\ = \bigcup_{k=1}^{s-r} (K_R(0) \cap (R^{r(r-s)})^{-1} \bar{\mathbb{E}}(-e^{-1}(\psi/(s-r) + 2k\pi))) \quad).$$

Somit ist ∂_2 klar.

Da ausserhalb der Menge $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = 0\}$ die Abbildung

$$F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, (z, w) \longmapsto (z, z^r + z^s w)$$

immer lokal biholomorph ist und ausserdem gilt: (für $i = 1, 3$)

$$\partial P_q \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = 0\} \subset \partial_2 \text{ und } \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = 0\} \cap \partial_1 = \emptyset$$

genügt es zu zeigen, dass $F(\partial_3)$ topologisch reell 3-dimensional ist.

$$F(\partial_3) = \{(z, e^{i\chi}) \in \mathbb{C}^2 : \chi \in [0, 2\pi[; z, w \in \bar{\mathbb{E}} \text{ mit } z^r + z^s w = e^{i\chi}\} \\ = \bigcup_{\chi \in [0, 2\pi[} \{(z, e^{i\chi}) \in \mathbb{C}^2 : z \in A_\chi\}$$

$$A := \bigcup_{R \in [R_0, 1]} \bigcup_{k=1}^r \{R e^{i(\varphi + (\chi + 2k\pi)/r)} \in \mathbb{C} : \varphi \in [\varphi_R, 2\pi - \varphi_R]\}$$

wobei R_0 durch die Gleichung $R_0^r + R_0^s = 1$ eindeutig festgelegt wird ($R_0 \in [0, 1[$) und der Winkel φ_R zu jedem $R \in [R_0, 1]$

in der folgenden Weise bestimmt werden kann:

Sei D_R das Dreieck mit Seiten der Länge 1, R^r, R^s , dann ist φ_R der Winkel zwischen den Seiten der Länge 1 und R^r .

(Denn dann gibt es zu jedem $R \in [R_0, 1[$ und jedem $\varphi \in [\varphi_R, 2\pi - \varphi_R]$

ein $\psi \in [0, 2\pi[$ und ein $\bar{R} \in [0, 1]$, so dass für

$$z := R e^{i\varphi} \text{ und } w := \bar{R} e^{i\psi} \text{ folgt: } z^r + z^s w = 1.$$

Ersetzt man φ durch $\varphi - (\chi + 2k\pi)/r$ und ψ mit $\psi - (\chi + 2k\pi)(r-s)/r$, so

erhält man: $z^r + z^s w = e^{i\chi}$. Dann ist ∂_3 klar.

Jetzt soll noch überprüft werden, ob P_q ein Gebiet in $\mathbb{C}^2$ definiert; hierzu genügt es zu zeigen, dass P_q wegzusammenhängend ist. Offenbar gilt:

$$P_q \supset E \times \{0\} =: E_w \quad (\text{wie man durch Einsetzen sieht}).$$

Deshalb genügt es, wenn jeder Punkt $(z_0, w_0) \in P_q$ durch einen Weg in P_q mit einem Punkt aus E_w verbunden werden kann.

Sei durch $w : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $w(t) := (z_0, t w_0)$ ein Weg definiert.

Da nach Voraussetzung $z_0, w_0, z_0^r + z_0^s w_0 \in E$ ist, gilt:

$$|z_0^r| |1 + z_0^{s-r} w_0| = |z_0^r + z_0^s w_0| < 1 \quad \text{und} \quad |z_0^r| < 1$$

Ausserdem ist $z_0^{s-r} w_0 = R_0 e^{i\varphi_0}$ für bestimmte R_0, φ_0 .

Jetzt sieht man leicht elementar ein, (etwa durch Untersuchung der Fälle $\varphi_0 \in [\pi/2, 3\pi/2]$ bzw. $\varphi_0 \notin [\pi/2, 3\pi/2]$), dass

$$|1 + t z_0^{s-r} w_0| \leq \max\{|1 + z_0^{s-r} w_0|, 1\} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Damit folgt sofort: $w(t) \in P_q$ für $0 \leq t \leq 1$.

Also definiert P_q (für jedes $q = rs^{-1}$ mit $0 < r < s$; r, s teilerfremde ganze Zahlen) ein Polyedergebiet der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$, so dass $z, w, z^r + z^s w$ Minimal- und Zerlegungssystem für P_q ist.

Dann wird ein wesentliches Zerlegungsgewebe für P_q durch

$$W_q := W_{r,s} / P_q \quad (\text{mit } W_{r,s} \text{ gemäss Lemma 3.1}) \text{ definiert}$$

(und alle weiteren Zerlegungsgewebe sind permutierte Gewebe W_q^τ ,

mit $\tau \in \mathfrak{S}_3$).

Die Invariantenfunktionen des (nichtlinearen) Gewebes W_q sind dann Einschränkungen (auf P_q) der in 3.1 aufgeführten Invarianten; sie sollen mit $I_1^q, I_2^q, I_3^q, J_0^q, J_1^q$ bezeichnet werden.

Insbesondere liefert J_0 :

$$J^q := a_q I_1^q + c_q I_3^q \equiv 1 \quad \text{mit} \quad a_q := (r-s)(3s^4)^{-1}, c_q := -(3s^3)^{-1}$$

die einzige Invariante von der Form $aI_1^q + bI_2^q + cI_3^q$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, welche konstant gleich 1 ist, (vgl. Lemma I 1.10). Diese Einzigkeitsaussage ist recht nützlich für b).

b) Es seien P_q und $P_{\bar{q}}$ mit $q \neq \bar{q}$ und $q, \bar{q} \in \mathbb{Q} \cap]0, \frac{1}{2}[$ vorgegeben. Annahme: Es gibt eine eigentliche holomorphe Abbildung

$f : P_{\bar{q}} \longrightarrow P_q$; so wird (gemäss III 2.3) für geeignetes $\tau \in \mathfrak{S}_3$ eine gewebetreue Abbildung (der Zerlegungsgewebe $W_{\bar{q}}$ bzw. $W_{\bar{q}}^\tau$)

$f : W_{\bar{q}} \longrightarrow W_q^\tau$ induziert.

Wenn I bzw. $\bar{I}$ Invarianten von W_q auf P_q bzw. von $\bar{W}_q$ auf $\bar{P}_q$ (die analog definiert sind, vgl. auch I §2.9, 10) sind, so muss

$I \circ f = \bar{I}^\tau$ gelten, (wobei $\bar{I}^\tau$ für die ersten Invarianten aus der Tabelle III 2.6 zu ersehen ist).

Insbesondere sieht man sofort, dass nur $\tau = \text{id}$, $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix})$ möglich ist: denn für alle andern Permutationen werden den beschränkten Invarianten I_1^q, I^q vermöge f Kombinationen von I_1^q, I_2^q, I^q zugeordnet, die aber immer unbeschränkt werden, (da I_2^q auf P_q unbeschränkt ist!). Z.B. für $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix})$ folgt: $I_1^q \circ f = I_2^q$ (dies ist offenbar unmöglich!)
Fall $\tau = \text{id}$:

Es gilt insbesondere: $1 = J^q \circ f = a_q I_1^q + c_q I^q =: \bar{J}$

Andrerseits: $1 = J^{\bar{q}} = a_{\bar{q}} I_1^{\bar{q}} + c_{\bar{q}} I^{\bar{q}}$

Offenbar erfüllen beide Invarianten $\bar{J}$ und $J^{\bar{q}}$ von $\bar{W}_q$ auf $\bar{P}_q$ das Lemma I 1.10 und müssen identisch sein:

es muss $a_q = a_{\bar{q}}$ sowie $c_q = c_{\bar{q}}$ gelten.

Dies liefert sofort: $r = \bar{r}$ und $s = \bar{s}$: also ist $q = \bar{q}$.

Aus diesem Widerspruch folgt: $\tau = \text{id}$ ist nicht möglich.

Fall $\tau = (\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix})$:

Die Tabelle III 2.6 liefert:

$(I_1^q + a I^q) \circ f = (a-1) I_1^q + a I^q$ für jedes $a \in \mathbb{C}$

Da die Invariantenzuordnung offenbar linear ist, folgt:

$$\begin{aligned} 1 = J^q \circ f &= a_q (I_1^q + c_q a_q^{-1} I^q) \circ f = \\ &= a_q (c_q a_q^{-1} - 1) I_1^q + c_q a_q^{-1} I^q \\ &= (c_q - a_q) I_1^q + c_q I^q. \end{aligned}$$

Andrerseits ist:

$$1 = J^{\bar{q}} = a_{\bar{q}} I_1^{\bar{q}} + c_{\bar{q}} I^{\bar{q}}$$

Wiederum muss wegen Lemma I 1.10 folgen:

$$a_{\bar{q}} = c_q - a_q \quad \text{und} \quad c_{\bar{q}} = c_q$$

Dies liefert nach Festlegung der a_q, c_q bzw. $a_{\bar{q}}, c_{\bar{q}}$ (vgl. Teil a)):

$$s = \bar{s} \quad \text{und} \quad \bar{r} = s - r$$

Da aber $q, \bar{q} \in]0, \frac{1}{2}[$ nach Voraussetzung ist, folgt:

$$0 < r < \frac{s}{2} \quad \text{sowie} \quad 0 < \bar{r} < \frac{s}{2}. \text{ Deshalb muss } \bar{r} = s - r > \frac{s}{2} \text{ sein.}$$

Dies liefert einen Widerspruch zur Definition der $q, \bar{q}$.

Insgesamt folgt damit die Aussage b).

3.3 Satz

Sei $q = rs^{-1} \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ fest (mit teilerfremden $s > r > 0$).

a) Dann definiert die Menge

$$P_q^{\alpha, \beta} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < \alpha, |w| < \beta, |z^r + z^s w| < 1\}$$

ein Polyedergebiet der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$ (mit Zerlegungsgewebe Typ (I)), falls $(\alpha, \beta) \in M_q$, und M_q die folgende Menge bezeichnet:

$$M_q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y; |x^{r-s} - x^{-s}| < y < x^{r-s} + x^{-s}\}$$

b) $(P_q^{\alpha, \beta} : (\alpha, \beta) \in M_q)$ definiert eine Familie von Polyedergebieten der Stufe 3 (und Cartanschen $(1, r-s)$ -Bereichen) in $\mathbb{C}^2$, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können, wobei $q \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$ und $q \neq \frac{1}{2}$ gewählt werden kann.

Beweis: a) Offenbar ist $P_q^{\alpha, \beta}$ affin äquivalent zu

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |(\alpha z)^r + (\alpha z)^s \beta w| < 1\}$$

Ähnlich wie in Teil a) des Beweises zu 3.2 werden Randmengen $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ untersucht: ($\partial_1, \partial_2, \partial_3$ seien analog wie in 3.2 a))

Falls $(\alpha, \beta) \in M_q$ ist, so folgt:

$z, w, \alpha^r z^r + \alpha^s \beta z^s w$ ist ein Minimalsystem für $P_q^{\alpha, \beta}$, denn

$\partial_1 \neq \emptyset$ weil man zu jedem $\varphi \in [0, 2\pi[$ immer erreichen kann,
dass $e^{ir\varphi} \alpha^r + e^{is\varphi} \alpha^s \beta w \in \mathbb{E}$ für geeignetes $\arg(w)$,
wenn $|\alpha^r - \alpha^s \beta| < 1$

$\partial_2 \neq \emptyset$ immer, da $z = 0$ die Ungleichungen liefert.

$\partial_3 \neq \emptyset$ sicher, wenn gilt: $|\alpha^r \pm \alpha^s \beta| > 1$

"-" wegen ∂_1 nicht möglich, deshalb: $\alpha^r + \alpha^s \beta > 1$

(Damit sind die Bedingungen für M_q erklärt $\rightarrow$ Stufe 3!).

$\partial_1, i=1, 2, 3$ sind topologisch von reeller Dimension 3 (wie im Beweis von 3.2 a)) und $P_q^{\alpha, \beta}$ ist ein Gebiet (ebenfalls wie 3.2 a)).

Offenbar sind die Funktionen $z, w, z^r + z^s w$ ein Zerlegungssystem für $P_q^{\alpha, \beta}$;

$W_q^{\alpha, \beta} := W_{r,s} / P_q^{\alpha, \beta}$ ist ein wesentliches Zerlegungsgewebe von $P_q^{\alpha, \beta}$

und Lemma 3.1 liefert die ersten Invarianten von $W_q^{\alpha, \beta}$ (als Beschränkungen der dort aufgeführten Invariantenfunktionen I_1, I_2, I, J_0, J_1 auf $P_q^{\alpha, \beta}$: sie sollen mit $I_1^{\alpha, \beta}, I_2^{\alpha, \beta}, I^{\alpha, \beta}, J_0^{\alpha, \beta}, J_1^{\alpha, \beta}$ bezeichnet werden, da in diesem Satz q fest ist).

Insbesondere folgt aus Lemma 3.1 a): $W_q^{\alpha, \beta}$ ist von Typ (I).

Ein wichtige Rolle spielen die Invarianten $J_0^{\alpha,\beta}$ und $J_1^{\alpha,\beta}$:
die erstere liefert die normierte konstante Invariante

$$J^{\alpha,\beta} := a_q I_1^{\alpha,\beta} + c_q I^{\alpha,\beta} = 1 \quad \text{mit } a_q := (r-s)(3s^4)^{-1}, c_q := -(3s^3)^{-1}$$

(gemäss Lemma I 1.10 die einzige Linearkombination der Invarianten $I_1^{\alpha,\beta}, I_2^{\alpha,\beta}, I^{\alpha,\beta}$, welche konstant gleich 1 ist).

$$J_1^{\alpha,\beta}(z,w) = z^{s-r} w \quad \text{ist offenbar eine beschränkte Invariante}$$

b) Sei $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = rs^{-1}$ für teilerfremde ganze Zahlen r, s so dass $0 < r < s$ und $q \neq \frac{1}{2}$

Annahme: es gibt eine eigentliche holomorphe Abbildung

$$f: P_q^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \longrightarrow P_q^{\alpha,\beta} \quad \text{für } (\alpha,\beta), (\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) \in M_q.$$

Aus der Annahme soll im Folgenden geschlossen werden, dass es auf die Mengen $J_1^{\alpha,\beta}(P_q^{\alpha,\beta})$ und $J_1^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(P_q^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}})$ ankommt, ob es (keine) eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen $P_q^{\alpha,\beta}$ und $P_q^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ gibt. Zunächst folgt aus obiger Annahme (nach III 2.3):

es gibt eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_3$, so dass

$$f: W_q^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \longrightarrow (W_q^{\alpha,\beta})^\tau \quad \text{gewebetreue Abbildung ist und für (analog definierte) Invarianten } I \text{ von } W_q^{\alpha,\beta} \text{ bzw. } \bar{I} \text{ von } W_q^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$$

gemäss den Überlegungen von I 2.9, 10 und III 2.5-7 (Über gewebe-treuen Abbildungen zwischen permutierten Geweben) gelten muss:

$I \circ f = \bar{I}^\tau$ (wobei $\bar{I}^\tau$ für die niedrigsten Invarianten aus der Tabelle III 2.6 zu entnehmen ist). Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} J^{\alpha,\beta} \circ f &= a_q \cdot (I_1^{\alpha,\beta} + c_q a_q^{-1} I^{\alpha,\beta}) \circ f \\ &= a_q \cdot (I_1^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} + c_q a_q^{-1} I^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}})^\tau =: \bar{J} \end{aligned}$$

Offensichtlich sind $J_q^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ und $\bar{J}$ konstante normierte Invarianten von $W_q^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$, welche nach Lemma I 1.10 mit denselben Koeffizienten a, b, c als Linearkombination $a I_1^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} + b I_2^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} + c I^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ geschrieben werden müssen, (wie in 3.2 b)).

Insbesondere ergibt sich hier: $b = c$.

Aus der Tabelle entnimmt man sofort: (vgl. III 2.6)

$$\tau \neq \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \text{ da in diesen Fällen } b = \pm a_q \neq 0$$

$$\tau \neq \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \text{ da in diesen Fällen } b \stackrel{!}{=} 0 \text{ liefert: } a_q = c_q$$

aber dies ergibt: $s = s - r$, Widerspruch!

$$\tau \neq \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \quad \text{denn wie in 3.2 b) kann man schliessen: } r = s - r$$

aber da $q = rs^{-1} \neq \frac{1}{2}$ folgt Widerspruch!

Es muss also notwendigerweise $\tau = \text{id}$ sein. Insbesondere gilt:

$$J_1^{\alpha, \beta} \circ f = J_1^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$$

Da f als eigentliche holomorphe Abbildung auch surjektiv ist, und die Invariantenfunktionen offenbar beschränkt sind, folgt:

$$J_1^{\alpha, \beta}(P_q^{\alpha, \beta}) = J_1^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}(P_q^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}) \subset \mathbb{C} \quad (\text{als beschränkte Mengen})$$

Um zu klären, ob es (keine) eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen $P_q^{\alpha, \beta}$ und $P_q^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}}$ gibt, soll nun versucht werden für die $(\alpha, \beta) \in M_q$ die Menge $J_1^{\alpha, \beta}(P_q^{\alpha, \beta})$ zu charakterisieren bzw. die Menge $I_{\alpha, \beta} := J_q^{\alpha, \beta}(P_q^{\alpha, \beta}) \cap \mathbb{R}$ zu bestimmen.

Mit Hilfe elementarer geometrischer Überlegungen folgt aus den definierenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 1 + J_1^{\alpha, \beta}(P_q^{\alpha, \beta}) &= \bigcup_{a \in [0, \alpha[} \bigcup_{b \in [0, \beta[} (K_{a^{s-r}b} \cap a^{-r} E) \\ &= \bigcup_{a \in [0, \alpha[} (a^{s-r} E(1) \cap a^{-r} E) \end{aligned}$$

(da die Kreislinien $K_{a^{s-r}b}$ den Kreis $a^{s-r} \cdot E(1)$ ausschöpfen).

Für die Menge $I_{\alpha, \beta}$ ergibt sich folglich (durch Schnitt mit $\mathbb{R}$):

$$1 + I_{\alpha, \beta} = \bigcup_{a \in [0, \alpha[} (]\hat{u}_p(a), \hat{o}_p(a)[) =:]u(\alpha, \beta), o(\alpha, \beta)[$$

wobei für die Intervallgrenzen $\hat{u}_p(a), \hat{o}_p(a), u(\alpha, \beta), o(\alpha, \beta)$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{u}_p(a) &= \max(-a^{-r}, 1 - a^{s-r}\beta) \\ \hat{o}_p(a) &= \min(1 + a^{s-r}\beta, a^{-r}) \end{aligned} \quad \text{für } a \in [0, \alpha[$$

$$u(\alpha, \beta) = \min(\hat{u}_p(a); a \in [0, \alpha[)$$

$$o(\alpha, \beta) = \max(\hat{o}_p(a); a \in [0, \alpha[)$$

Aus der Voraussetzung $(\alpha, \beta) \in M_q$ folgt:

$$1 - a^{s-r}\beta > -a^{-r} \quad \text{und} \quad a^{s-r} + 1 > a^{-r} > 1 - a^{s-r}\beta$$

Für $\hat{u}_p(a)$ und $\hat{o}_p(a)$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{u}_p(a) &= 1 - a^{s-r}\beta && \text{falls } 1 - a^{s-r}\beta > -a^{-r} \\ &= -a^{-r} && \text{falls mit } -a_u^{-r} = 1 - a_u^{s-r}\beta; a > a_u \\ \hat{o}_p(a) &= 1 + a^{s-r}\beta && \text{falls } 1 + a^{s-r}\beta < a^{-r} \\ &= a^{-r} && \text{falls mit } a_o^{-r} = 1 + a_o^{s-r}\beta; a > a_o \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $o(\alpha, \beta)$ und $u(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= 1 - \alpha^{s-r} \beta && \text{falls } 1 - \alpha^{s-r} \beta > -\alpha^{-r} \\ &= -a_u^{-r} && \text{sonst mit } -a_u^{-r} = 1 - a_u^{s-r} \beta \\ o(\alpha, \beta) &= 1 + \alpha^{s-r} \beta && \text{falls } 1 + \alpha^{s-r} \beta < \alpha^{-r} \\ &= a_o^{-r} && \text{sonst mit } a_o^{-r} = 1 + a_o^{s-r} \beta \end{aligned}$$

Deshalb folgt:

$$u(\alpha, \beta) = 1 - \alpha^{s-r} \beta \quad \text{für alle } (\alpha, \beta) \in M_q \text{ wegen (+)!}$$

$$o(\alpha, \beta) = a_o^{-r} \quad \text{für alle } (\alpha, \beta) \in M_q, \text{ denn:}$$

aus (+) folgt für $(\alpha, \beta) \in M_q$ immer: $1 + \alpha^{s-r} \beta > \alpha^{-r}$

Für das Existenzproblem von $f: P_q^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \longrightarrow P_q^{\alpha, \beta}, (\alpha, \beta), (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in M_q$ muss notwendigerweise gelten:

$$I_{\alpha, \beta} = I_{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \quad \text{und deshalb offensichtlich auch:}$$

$$]u(\alpha, \beta), o(\alpha, \beta)[=]u(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), o(\bar{\alpha}, \bar{\beta})[$$

Dies liefert die Gleichungen:

$$\alpha^{s-r} \beta = (\bar{\alpha})^{s-r} \bar{\beta} \quad \text{sowie} \quad a_o(\alpha, \beta) = \bar{a}_o(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

Für $(\alpha, \beta), (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in M_q$ mit $(\alpha, \beta) \neq (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ folgt sofort:

Ist $\beta \neq \bar{\beta}$, so muss offenbar $a_o \neq \bar{a}_o$ sein; also gibt es kein f !

Ist $\beta = \bar{\beta}$, so muss offensichtlich $\alpha \neq \bar{\alpha}$ sein; dann ist allerdings

$$u(\alpha, \beta) = 1 - \alpha^{s-r} \beta \neq 1 - (\bar{\alpha})^{s-r} \beta = u(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$$

Also gibt es ebenfalls kein f !

$(a_o(\alpha, \beta))$ existiert immer, da für $a > 0$ die Funktionen a^{-r} und $1 + a^{s-r} \beta$ stets positiv sind, a^{-r} streng monoton fällt und $1 + a^{s-r} \beta$ streng monoton steigt, $(1)^{-r} < 1 + (1)^{s-r} \beta$ sowie $(0^+)^{-r} > 1 + (0^+)^{s-r} \beta$ gilt!

Damit ist insgesamt gezeigt, dass für jedes $q \in \mathbb{Q}, q \neq \frac{1}{2}$ die Familie $(P_q^{\alpha, \beta}: (\alpha, \beta) \in M_q)$ aus paarweise nicht eigentlich holomorph aufeinander abbildbaren Polyedergebieten der Stufe 3 besteht, die zugleich noch Cartansche Körpern (bzw. $(1, r-s)$ -Bereiche) sind.

Den Fall $q = \frac{1}{2}$ (dh. $r = 1, s = 2$) müsste man mit etwas mehr Mühe untersuchen, (denn man hätte die Möglichkeit $\tau = \binom{123}{132}$ einzubeziehen!), um entsprechende Aussagen zu erhalten.

U.a. wären die Gleichungen von $]1-\alpha\beta, 1-\beta[=]\frac{1}{2}-\bar{\alpha}\bar{\beta}, \frac{1}{2}-\bar{\beta}[$ zu betrachten, die sich in analoger Weise wie eben ergeben.

3.4 Satz

Sei $q = rs^{-1} \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$ mit teilerfremden ganzen Zahlen r, s .

a) Dann definiert zu jedem $a \in]0,1[$ die Menge

$$P_q^a := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w - a| < 1, |z^r + z^s w| < 1\}$$

ein einfach zusammenhängendes Polyedergebiet der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$;

b) Jedes P_q^a ist starr gegenüber eigentlichen holomorphen Abbildungen auf sich, wenn $q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[; q \neq \frac{1}{2}$ gewählt ist.

c) Die Familie $(P_q^a : q \in \mathbb{Q} \cap]0, \frac{1}{2}[)$ definiert eine abzählbare Familie von starren Polyedergebieten der Stufe 3, die nicht paarweise auf-einander eigentlich holomorph abgebildet werden können.

d) Die Familie $(P_q^a : a \in]0,1[)$ besteht aus starren Polyedergebieten, die man paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abbilden kann, wobei $q \in \mathbb{Q} \cap]0,1[, q \neq \frac{1}{2}$ gewählt werde.

Beweis: P_q^a ist ein Gebiet, da man zu jedem $(z_0, w_0) \in P_q^a$ den Weg

$t \longmapsto (z_0, t w_0)$ in P_q^a betrachten kann (vgl. 3.2 a)) und

$E \times \{0\} \subset P_q^a$ gilt; deshalb ist P_q^a einfach zusammenhängend, 3.8 c)!

Da man wie in 3.2 a) die Randmengen $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ betrachten kann, und $\{(z, w) : d(z^r + z^s w) = 0\} \cap \partial_3 = \emptyset$, folgt (III 1.2 b)!

P_q^a ist Polyedergebiet der Stufe 3.

(Man könnte wie in 3.2 a) nachrechnen, dass alle $\partial_i, i = 1, 2, 3$ topologisch von der reellen Dimension 3 sind).

Auch die Echtheit der ∂_i , (dh. $\partial_i \neq \emptyset$), $i = 1, 2, 3$ ist offensichtlich leicht zu sehen, analog der Argumentation von 3.2 a).

Schliesslich ist $z, w - a, z^r + z^s w$ ein Minimalsystem für P_q^a .

Ausserdem ist dann $z, w, z^r + z^s w$ ein Zerlegungssystem für P_q^a und deshalb ist nach Lemma 3.1 a) ein Zerlegungsgewebe auf P_q^a durch $W_q^a := W_{r,s}/P_q^a$ gegeben.

Insbesondere besitzt dieses Zerlegungsgewebe die in 3.1 c), d) aufgeführten Invarianten, die mit $I_1^a, I_2^a, I^a, J_0^a, J_1^a$ bezeichnet werden sollen (für fest angenommenes q !).

b) Starrheit von P_q^a :

Mit Hilfe der, aus der konstanten Invarianten J^a gewonnenen normierten, Invarianten $J^a := (r-s)(3s^4)^{-1} I_1^a - (3s^2)^{-1} I^a = 1$

kann man genauso wie im Beweis zu 3.3 b) wegen $q \neq \frac{1}{2}$ alle Permutationen $\neq \text{id}$ der Zerlegungen unter eigentlichen holomorphen Selbstabbildungen ausschliessen.

Für eine eigentliche holomorphe Abbildung

$$F : P_q^A \longrightarrow P_q^A$$

folgt also, es wird eine gewebetreue Abbildung

$$F : W_q^A \longrightarrow (W_q^A)^\tau \text{ mit } \tau = \text{id (wie in 3.3 b), Beweis, mit } J^A)$$

induziert, so dass gilt:

$$I \circ F = I \quad \text{für jede Invariantenfunktion } I \text{ von } W_q^A \text{ auf } P_q^A$$

Insbesondere folgt für $I = J_1^A$, wenn man die Abbildung F wie folgt schreibt:

$$F = (f, g) \text{ mit holomorphen Funktionen } f, g : P_q^A \longrightarrow E \subset \mathbb{C} : \\ (f(z, w))^{s-r} g(z, w) = z^{s-r} w$$

Andrerseits bedeutet (nach Satz von Remmert-Stein III 1.3; 2.3) die Eigenschaft $\tau = \text{id}$ aber auch noch: (für die Zerlegungen)

$$dz \wedge df = dz \wedge d(\text{pr}_1(F)) = 0$$

$$dw \wedge dg = dw \wedge d(\text{pr}_2(F)) = 0$$

Dies bedeutet nichts anders als:

$$f(z, w) = f(z) \quad \text{bzw.} \quad g(z, w) = g(w)$$

Damit bedeutet die obige Invariantengleichung:

$$(f(z))^{s-r} g(w) = z^{s-r} w \quad \text{auf } P_q^A \quad (+)$$

Insbesondere gibt es eine offene Menge $U \subset P_q^A$ derart, dass die Funktionen $g(\cdot)/U$ und $\text{pr}_1(\cdot)/U$ auf U nirgends verschwinden und somit sind

$$(f(z) z^{-1}), (g(w)^{-1} w) : U \longrightarrow \mathbb{C}$$

wohldefinierte holomorphe Funktionen; und es gilt wegen (+)

$$(f(z) z^{-1})^{s-r} = (g(w)^{-1} w) \quad \text{auf } U.$$

Deshalb kann nur folgen:

es gibt $A = R e^{i\varphi} \neq 0$ derart, dass:

$$F(z, w) = (f(z), g(w)) = (A z, A^{r-s} w)$$

Aber da $(t, 0) \in P_q^A$ für alle $t \in [0, 1[$ muss $R = 1$ sein.

Daher muss $F(z, w) = (e^{i\varphi} z, e^{i(r-s)\varphi} w)$ gelten.

Allerdings gilt für jedes $\psi \in [0, 2\pi[$:

es gibt ein $w_\psi \in E \cap E(a)$, so dass gilt: $e^{i(r-s)\psi} w_\psi \notin E \cap E(a)$

dh.: aus $(0, w_\psi) \in P_q^A$ folgt jedoch: $F(0, w_\psi) \notin P_q^A$

Es gibt folglich keine gewebetreue Abbildung F :

P_q^A muss starr gegenüber eigentlichen holomorphen Abbildungen

auf sich sein, d.h. die Aussage b) ist nachgewiesen.

c) folgt wegen b) direkt genauso wie im Satz 3.2 b);

es sind genau dieselben Überlegungen erforderlich, denn $q \neq \frac{1}{2}$.

d) Um zu zeigen, ob es (keine) eigentliche holomorphe Abbildungen $f: P_q^a \longrightarrow P_q^{\bar{a}}$ für $a \neq \bar{a}; a, \bar{a} \in]0, 1[$ gibt, ist wegen III 2.3

wieder zu überlegen, ob es überhaupt gewebetreue holomorphe surjektive Abbildungen zwischen den (eventuell permutierten) Zerlegungsgeweben W_q^a auf $W_q^{\bar{a}}$ geben kann.

Mit derselben Argumentation wie im Beweis zu 3.3 b) kann man wegen $q \neq \frac{1}{2}$ alle Permutationen (mit Hilfe der konstanten normierten Invarianten J^a auf Grund von Lemma I 1.10) bis auf die identische ausschliessen. Wieder kann man dann mit der beschränkten Invarianten J_1^a von W_q^a auf P_q^a arbeiten, die wie folgt lautet:

$$J_1^a: (z, w) \longmapsto z^{s-r} w$$

und ihrer Bildmenge (bzw. einem geeigneten Teil davon) sich bedienen.

Man könnte mit elementaren geometrischen Argumenten die Menge $J_1^a(P_q^a)$ ähnlich wie in 3.3 b) Beweis als eine Vereinigung von Kreisen, die mit Kreislinien geschnitten werden, charakterisieren; für unsere Zwecke genügt es zu zeigen, dass

$$J_1^a(P_q^a) \cap \mathbb{R}_- =]-1 - a, 0] \quad (a)$$

" $\subset$ ": ist klar, da $|z| < 1, |w - a| < 1$ für $(z, w) \in P_q^a$.

" $\supset$ ": hierfür genügt es zu zeigen, dass

$$(e^{i\varphi} t, \tau) \in P_q^a \text{ für } 0 \leq t < 1, 0 \leq \tau < 1 + a, \varphi := \pi(s-r)^{-1}$$

Einerseits gilt für jedes feste $\tau \in [0, 1]$ und beliebigem $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |(t e^{i\varphi})^r + (t e^{i\varphi})^s \tau| &= t^r |1 + t^{s-r} \tau e^{i(s-r)\varphi}| \\ &= t^r |1 - t^{s-r} \tau| < 1 \end{aligned}$$

(da offenbar $t^r, t^{s-r} \in [0, 1[$ sind);

andererseits folgt für $\tau = 1 + t_1 \cdot a$ mit $t_1 \in [0, 1[, t \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned} |(t e^{i\varphi})^r + (t e^{i\varphi})^s \cdot \tau| &= t^r |1 + t^s e^{i(s-r)\varphi} (1 + t_1 a)| \\ &= t^r |(1 - t^s) - t^s t_1 a| < 1 \end{aligned}$$

(da wie eben $t^r, (1 - t^s), t^s \cdot t_1 \cdot a \in [0, 1]$ wegen $0 \leq a, t < 1$);

durch Einsetzen berechnet sich nun:

$$J_1^a(e^{i\varphi} t, \tau) = t^{s-r} \cdot e^{i(s-r)\varphi} \cdot \tau = -t^{s-r} \cdot \tau \in]-1-a, 0]$$

da t das Intervall $[0, 1[$ und τ das Intervall $[0, 1 + a[$ durchlaufen dürfen, (wie eben überprüft), folgt die obige Behauptung (a).

Annahme: es gibt eine eigentliche holomorphe Abbildung

$$f: P_q^a \longrightarrow P_q^{\bar{a}} \quad \text{für } a, \bar{a} \in]0, 1[\text{ mit } a \neq \bar{a}$$

Wie schon erwähnt, induziert f eine gewebetreue surjektive (holomorphe) Abbildung

$$f: W_q^a \longrightarrow W_q^{\bar{a}} \quad \text{der Zerlegungsgewebe von } P_q^a \text{ bzw. } P_q^{\bar{a}}.$$

Für die Invarianten J_1^a von W_q^a und $J_1^{\bar{a}}$ von $W_q^{\bar{a}}$ muss gelten:

$$J_1^{\bar{a}} \circ f = J_1^a \quad \text{auf } P_q^a; \text{ da } f \text{ surjektiv ist, folgt:}$$

$$J_1^{\bar{a}}(P_q^{\bar{a}}) = J_1^a(P_q^a) \subset \mathbb{C} \quad \text{und insbesondere:}$$

$$J_1^{\bar{a}}(P_q^{\bar{a}}) \cap \mathbb{R}_- = J_1^a(P_q^a) \cap \mathbb{R}_-, \text{ dh. wegen (a) bzw. } (\bar{a}) \text{ gilt:}$$

$] -1 - a, 0] =] -1 - \bar{a}, 0]$ dies ist ein Widerspruch zu $a \neq \bar{a}$!
Also gibt es keine eigentlichen holomorphen Abbildungen zwischen den Polyedergebieten $P_q^a, a \in]0, 1[$ für festes $q \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[, q \neq \frac{1}{2}$.

Damit ist eine stetige Familie von starren Polyedergebieten der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$ mit nichtlinearen Zerlegungsgeweben angegeben, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können. Ausserdem approximieren sie für a gegen Null ein Polyedergebiet der Stufe 3 (nämlich P_q), das nicht starr und ein Cartanscher Körper (genauer: $(1, r-s)$ -Bereich) ist.

3.5 Bemerkungen:

a) Mit mehr Rechenaufwand kann man Polyedergebiete der Stufe 3 mit Minimalsystem $z - a, w - b, \alpha z^r + \beta z^s w - c$ für geeignete reelle Zahlen a, b, α, β und komplexes c definieren, deren Zerlegungsgewebe ebenfalls eine konstante normierte Invariante J sowie die beschränkte Invariante J_1 erhalten (mit obigen Formeln).

Übrigens ist es eine kanonische Forderung a , und b reell zu nehmen: durch passende Drehungen in der jeweiligen Koordinate erhältlich!

b) Für $r, s, t, l \in \mathbb{N}$ mit $r \neq s$ und $t \neq l$ definieren die holomorphen Funktionen $z, w, z^r w^t + z^s w^l$ meromorphe Gewebe auf $\mathbb{C}^2$:

$$(\mathbb{C}^2, -(rz^{r-1}w^t + sz^{s-1}w^l)dz, -(tz^r w^{t-1} + lz^s w^{l-1})dw, d(z^r w^t + z^s w^l))$$

Diese Gewebe sind entweder linear (für $rs^{-1} = tl^{-1}$) oder von Typ (I); nach Folgerung II 2.10 ist wegen der lokalen gewebetreuen Abbildungen $(z, w) \longmapsto (e^{i(1-t)\varphi_z}, e^{i(r-s)\varphi_w})$ (II) unmöglich.

c) Wegen b) kann man für gewisse $A \geq 1$ Polyedergebiete der Stufe 3 mit Minimalsystem $z, w, A(z^r w^t + z^s w^l)$ definieren, die auch noch $(1-t, r-s)$ -Bereiche mit linearen bzw. Typ (I)-Zerlegungsgeweben sind, (wobei man sich evtl. auf Zusammenhangskomponenten beschränkt).

Es soll nun eine weitere Schar von Polyedergebieten in $\mathbb{C}^2$ angegeben werden, die nicht paarweise eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können und deren Zerlegungs-gewebe von Typ (II) ist.

3.6 Lemma

Die holomorphen Funktionen

$$f_1(z, w) := z, \quad f_2(z, w) := w, \quad f_3(z, w) := z + w + az^2w$$

definieren für jedes $a \in \mathbb{C}^*$ ein meromorphes Gewebe auf $\mathbb{C}^2$:

$$W^a := (\mathbb{C}^2, -(1 + 2azw)dz, -(1 + az^2)dw, d(z + w + az^2w))$$

und es gilt:

a) W^a ist nichtlineares Gewebe von Typ (II) für jedes $a \in \mathbb{C}^*$

b) Die niedrigsten Halbinvarianten K^a, K_1^a, K_2^a von W^a berechnen sich wie folgt:

$$K^a = -2a (1 + 2azw)^{-3} (1 + az^2)^{-1}$$

$$K_1^a = 4a^2 z (1 + 2azw)^{-4} (1 + az^2)^{-2}$$

$$K_2^a = 4a^2 (z - 3w - az^2w) (1 + 2azw)^{-5} (1 + az^2)^{-2}$$

c) Die ersten Invarianten $I_1^a := (K_1^a)^2 (K^a)^{-3}$, $I_2^a := (K_2^a)^2 (K^a)^{-3}$

sowie $I^a := K_1^a K_2^a (K^a)^{-3}$ von W^a sind folgendermassen gegeben:

$$I_1^a = -2az^2 (1 + 2azw) (1 + az^2)^{-1}$$

$$I_2^a = -2a (z - 3w - az^2w)^2 (1 + 2azw)^{-1} (1 + az^2)^{-1}$$

$$I^a = -2az (z - 3w - az^2w) (1 + az^2)^{-1}$$

d) Ausserdem kann man noch folgende spezielle Invarianten des Gewebes W^a einführen:

$$J^a := I_1^a - I^a = -6azw$$

$$J_1^a := I_1^a + 2 I^a = 6az (2w - z) (1 + az^2)^{-1}$$

Für diese Invarianten gilt insbesondere: $dJ^a \wedge d(J_1^a) \neq 0$.

(Dh. die Invariantenfunktionen J^a, J_1^a sind nicht analytisch abhängig und deshalb ist $W^a, a \in \mathbb{C}^*$ Gewebe von Typ (II)).

Beweis: Die Halbinvarianten K^a, K_1^a, K_2^a kann man mit Hilfe der Formeln aus dem Beispiel nach Lemma I 1.4 ausrechnen. Daraus kann man sofort die Ausdrücke in c) für die Invarianten I_1^a, I_2^a, I^a erhalten und ebenfalls leicht J^a, J_1^a errechnen. Schliesslich ist: $dJ^a \wedge d(J_1^a) = 36a^2 z^2 (1 + azw) (1 + az^2)^{-1} dz \wedge dw \neq 0 \rightarrow d)$ und a)!

3.7 Satz

Für jedes $a \in]1,2[$ definiert die Menge

$$P^a := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |z + w + az^2w| < 1\}$$

ein einfach zusammenhängendes Polyedergebiet der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$:

a) Jedes $P^a, a \in]1,2[$ hat ein Zerlegungsgewebe von Typ (II).

b) Jedes $P^a, a \in]1,2[$ ist starr.

c) $(P^a, a \in]1,2[)$ definiert eine Familie von starren Polyedergebieten der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können.

Beweis: $P^a, a \in]1,2[$ ist ein Gebiet: (ähnlich wie in 3.2 a), Beweis).

Für $(z_0, w_0) \in P^a$ gilt: $z_0, w_0, z_0 + w_0 + az_0^2w_0 \in E$

Da E konvex ist, folgt:

$$(1-t)z_0 + t(z_0 + w_0 + az_0^2w_0) \in E \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

$$\text{d.h. } z_0 + tw_0(1 + az_0^2) \in E \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

$$\text{also ist: } (z_0, tw_0) \in P^a \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

Insbesondere ist also jeder Punkt von P^a durch einen Weg mit einem Punkt von $E \times \{0\} \subset P^a$ verbindbar, d.h. P^a ist offenbar wegzusammenhängend, sogar einfach zusammenhängend, (vgl. 3.8 c)!).

Um zu zeigen, dass jedes $P^a, a \in]1,2[$ ein Polyedergebiet der Stufe 3 mit Minimalsystem $z, w, z + w + az^2w$ ist, werden die folgenden Mengen eingeführt:

$$\partial_1^a := \partial P^a \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| = 1, |w| < 1, |z + w + az^2w| < 1\}$$

$$\partial_2^a := \partial P^a \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| = 1, |z + w + az^2w| < 1\}$$

$$\partial_3^a := \partial P^a \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |z + w + az^2w| = 1\}$$

Offenbar gilt: $(x, 0) \in \partial_1^a$ und $(0, x) \in \partial_2^a$ für $x \in \mathbb{C}, |x| = 1$,

sowie $(t_0, -t_0), (1-t_0, -1-t_0) \in \partial_3^a$ mit $t_0 := a^{-1/3} \in]0,1[$.

Da $\partial_3^a \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : d(z + w + az^2w) = 0\} = \emptyset$ ist, (wie man leicht mit der Darstellung $\pm(1a^{-1/2}, 12^{-1}a^{-1/2})$ nachrechnet), folgt nach III 1.2 b) :

P^a ist Polyedergebiet in $\mathbb{C}^2$ mit Minimalsystem $z, w, z + w + az^2w$ und P^a ist von Stufe 3, da diese Funktionen offenbar paarweise analytisch unabhängig sind.

Offensichtlich ist das Zerlegungsgewebe von $P^a, a \in]1,2[$ durch Beschränkung des Gewebes von Lemma 3.6 auf P^a gegeben und soll hier ebenfalls mit W^a bezeichnet werden.

Das Zerlegungsgewebe W^a von P^a , $a \in]1,2[$ ist nichtlinear und besitzt die Invariantenfunktionen $I_1^a, I_2^a, I^a, J^a, J_1^a$ von Lemma 3.6 c) und d) (als Beschränkungen auf P^a der dort aufgeführten Invarianten, die der Kürze halber genauso bezeichnet werden sollen). Wegen 3.6 d) folgt sofort:

das Zerlegungsgewebe W^a von P^a ist von Typ $(II)_h \rightarrow a$.

Für die Aussagen b) und c) soll zunächst überlegt werden, ob es zu $a, \bar{a} \in]1,2[$ (wobei a und $\bar{a}$ nicht notwendig verschieden angenommen werden kann), überhaupt (keine) eigentliche holomorphe Abbildung $F : P^{\bar{a}} \longrightarrow P^a$ geben kann.

Da $P^a, P^{\bar{a}}$ Polyedergebiete der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$ sind, folgt wegen III 1.3 (Satz von Remmert-Stein) bzw. III 2.3:

Jede eigentliche holomorphe Abbildung $F : P^{\bar{a}} \longrightarrow P^a$ induziert eine gewebetreue holomorphe surjektive Abbildung

$$F : W^{\bar{a}} \longrightarrow (W^a)^\tau \quad \text{für geeignetes } \tau \in \mathfrak{S}_3$$

zwischen den (eventuell permutierten) Zerlegungsgeweben $W^{\bar{a}}, W^a$. Dann muss für (analog definierte) Invarianten I^a von W^a auf P^a bzw. $I^{\bar{a}}$ von $W^{\bar{a}}$ auf $P^{\bar{a}}$ nach I §2 gelten:

$$I^a \circ F = (I^{\bar{a}})^\tau \quad \text{auf } P^{\bar{a}}$$

wobei $(I^{\bar{a}})^\tau$ für die niedrigsten Invarianten (wie $I_1^{\bar{a}}, I_2^{\bar{a}}, I^{\bar{a}}$, etc.) aus der Tabelle III 2.6 (als eine gewisse Linearkombination aus $I_1^{\bar{a}}, I_2^{\bar{a}}, I^{\bar{a}}$, etc.) zu ersehen ist.

Insbesondere wäre der beschränkten Invariante $J^{\bar{a}}$ für $\tau \neq \text{id}$ genau eine der folgenden Invariantenfunktionen zuzuordnen:

$$- 2I_1^{\bar{a}} - I^{\bar{a}}, \quad - 2I_1^{\bar{a}} + I_2^{\bar{a}} + 3I^{\bar{a}}, \quad - 2I_2^{\bar{a}} - I_1^{\bar{a}} - 3I^{\bar{a}}, \quad - 2I_2^{\bar{a}} + I^{\bar{a}},$$

bzw. $I^{\bar{a}} - I_2^{\bar{a}}.$

(Dies folgt aus Tabelle III 2.6, Zeile 5, da $J^{\bar{a}} = I_1^{\bar{a}} - I^{\bar{a}}.$)

Andrerseits kann man leicht nachrechnen, dass alle diese meromorphen Invariantenfunktionen in $(i \cdot \bar{a}^{-1/2}, 0) \in P^{\bar{a}}$ eine Polstelle besitzen, (mit Hilfe der Formeln für $I_1^{\bar{a}}, I_2^{\bar{a}}, I^{\bar{a}}$ aus 3.6 c)).

Also kann (wegen der Beschränktheit von $J^{\bar{a}}$ auf $P^{\bar{a}}$) nur $\tau = \text{id}$ möglich sein.

b) Für eigentliche holomorphe Abbildungen (für festes $a \in]1,2[$) $F : P^a \longrightarrow P^a$, $(z, w) \longmapsto (f(z, w), g(z, w))$

mit $f, g \in \mathcal{O}(P^a)$ folgt mit denselben Argumenten wie im Beweis zu 3.4 b) wegen obigen Überlegungen zu $\tau \neq \text{id}$, dass für F gilt:

$$F(z,w) = (f(z), g(w)) = (R e^{i\varphi} z, R^{-1} e^{-i\varphi} w)$$

(da man $J^A \circ F = J^A$ wegen $\tau = \text{id}$ erhält, dh. $f(z) g(w) = zw$ ist!)

für geeignete $R \in \mathbb{R}_+, \varphi \in [0, 2\pi[$.

Da dann $F(E \times \{0\}) \subset E \times \{0\}$ und $F(\{0\} \times E) \subset \{0\} \times E$ gelten muss, folgt notwendigerweise: $R = 1$.

Jetzt muss noch untersucht werden, ob $\varphi \in]0, 2\pi[$ möglich ist.

1. Fall: $\arg(1 + e^{i(\pi - 2\varphi)}) \notin]\pi/2, 3\pi/2[$

Wie am Anfang bereits erwähnt, ist $(i t_0, -i t_0) \in \partial_3, t_0 = a^{-1/3}$.

Offenbar ist F stetig fortsetzbar auf $E \times E \subset \mathbb{C}^2$.

Für den Bildpunkt von $(i t_0, -i t_0)$ gilt dann:

$$|i t_0 e^{i\varphi} - i t_0 e^{-i\varphi} + i a e^{i\varphi} t_0^3| = |1 + t_0(1 + e^{i(\pi - 2\varphi)})| > 1$$

(denn nach Voraussetzung muss $\arg(1 + e^{i(\pi - 2\varphi)}) \notin]\pi/2, 3\pi/2[$!).

Aus Stetigkeitsgründen folgt nun, es gibt einen Punkt aus P^A , (genauer auf der Strecke zwischen 0 und $(i t_0, -i t_0)$), der vermöge F auf einen Punkt ausserhalb von P^A fällt!

2. Fall: $\arg(1 + e^{i(\pi - 2\varphi)}) \in]\pi/2, 3\pi/2[$

Jetzt kann man den Punkt $(t_0, -t_0) \in \partial_3$ mit $t_0 = a^{-1/3}$ nehmen:

Für seinen Bildpunkt unter der stetigen Fortsetzung von F auf $E \times E \subset \mathbb{C}^2$ folgt ähnlich wie eben:

$$|t_0 e^{i\varphi} - t_0 e^{-i\varphi} - a e^{i\varphi} t_0^3| = |-1 + t_0(1 + e^{i(\pi - 2\varphi)})| > 1$$

(nach Voraussetzung ist $\arg(1 + e^{i(\pi - 2\varphi)}) \in]\pi/2, 3\pi/2[$!!)

Aus Stetigkeitsgründen folgt, es gibt einen Punkt in P^A , (auf der Strecke zwischen 0 und $(t_0, -t_0)$), der von F nicht in P^A hinein abgebildet wird.

In jedem Fall kann F nicht P^A auf P^A abbilden, dh. nur $\varphi = 0$ liefert eine eigentliche holomorphe Abbildung von P^A auf sich: also muss $P^A, a \in]1, 2[$ ein starres Polyedergebiet der Stufe 3 sein. Damit ist b) erledigt.

c) Aus den obigen Überlegungen folgt, dass für eigentliche holomorphe Abbildungen zwischen verschiedenen Polyedergebieten der Schar $P^A, a \in]1, 2[$ nur die identische Permutation möglich ist. Deshalb soll zunächst die Menge $J^A(P^A)$ betrachtet werden, um dann ähnlich wie bei 3.4 d) mit Hilfe der (Un-) Gleichheit von den Invariantenbildmengen auf die Aussage von c) zu schliessen.

Es soll nun gezeigt werden, dass für $J^a = -6$ bzw. gilt:

$$J^a(P^a) \cap \mathbb{R}_+ = [0, 6a[\quad \text{für } a \in]1, 2[$$

Sei $(z, w) = (\alpha e^{i\varphi}, \beta e^{i\psi}) \in P^a$, dann folgt nach Definition von P^a : $\alpha, \beta \in [0, 1[$ und $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$ sowie $z + w + azw \in E$. Dieses ist offenbar äquivalent zu: (für $z \neq 0$) $e^{i(\varphi - \psi)}(1 + \alpha\beta e^{i(\varphi + \psi)}) \in \alpha^{-1} E(-\beta) \quad (+)$

$$\text{Andererseits gilt: } 1 - \frac{1}{6} J^a(z, w) = 1 + \alpha\beta e^{i(\varphi + \psi)}$$

Mit $\xi := \varphi + \psi$ und $\chi := \varphi - \psi$ ist (+) umgeschrieben zu $e^{i\chi}(1 + \alpha\beta e^{i\xi}) \in \alpha^{-1} E(-\beta) \quad (\text{für } z \neq 0).$

Sei $P_\chi^a := \{(z, w) \in P^a : \xi = \xi(\varphi, \psi) \in [0, 2\pi[; \alpha, \beta \in [0, 1[, \chi = \chi(\varphi, \psi)\}$ so folgt für jedes feste $\chi \in [0, 2\pi[$:

$$1 - \frac{1}{6} J_\chi^a(P_\chi^a) = K_{\alpha\beta}(1) \cap e^{-i\chi} \alpha^{-1} E(-\beta)$$

und insgesamt folgt für P^a , wenn χ ganz $[0, 2\pi[$ durchläuft:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{6} J^a(P^a) &= \bigcup_{\alpha, \beta \in [0, 1[} \bigcup_{\chi \in [0, 2\pi[} (K_{\alpha\beta}(1) \cap e^{-i\chi} \alpha^{-1} E(-\beta)) \\ &= \bigcup_{\alpha, \beta \in [0, 1[} (K_{\alpha\beta}(1) \cap (\beta + \alpha^{-1}) E) \end{aligned}$$

(da $\beta < 1 < \alpha^{-1}$ für $\alpha, \beta \in]0, 1[$ gilt!).

Durch Schneiden mit der negativen reellen Achse $\mathbb{R}_-$ folgt:

$$\mathbb{R}_- \cap (-\frac{1}{6} J^a(P^a)) = \bigcup_{\alpha, \beta \in [0, 1[}] -\alpha\beta, 0] =] -a, 0]$$

(wegen $1 - \alpha\beta > -\alpha^{-1} - \beta$, da $1 < \alpha < 2$

und $\alpha\beta, \alpha^{-1} + \beta - 1 > 0$ für $\alpha, \beta \in]0, 1[$). Es folgt also:

$$J^a(P^a) \cap \mathbb{R}_+ = [0, 6a[\quad \text{für alle } a \in]1, 2[.$$

Annahme: es gibt eine eigentliche holomorphe Abbildung

$$F : P^{\bar{a}} \longrightarrow P^a \quad \text{für paarweise verschiedene } a, \bar{a} \in]1, 2[.$$

Dann induziert F eine gewebetreue surjektive Abbildung

$$F : W^{\bar{a}} \longrightarrow W^a \quad \text{da wie oben Überlegt worden war, alle}$$

Permutationen $\tau \neq \text{id}$ ausgeschlossen wurden. Es folgt dann für die (analogen) Invarianten J^a bzw. $J^{\bar{a}}$ von W^a bzw. $W^{\bar{a}}$:

$$J^a \circ F = J^{\bar{a}} \text{ auf } P^{\bar{a}}, \text{ so dass insbesondere gilt: (da } F \text{ surjektiv)} \\ J^a(P^a) = J^{\bar{a}}(P^{\bar{a}}) \rightarrow]0, 6a[= \mathbb{R}_+ \cap J^a(P^a) = \mathbb{R}_+ \cap J^{\bar{a}}(P^{\bar{a}}) =]0, 6\bar{a}[$$

Dies liefert einen Widerspruch zu $a \neq \bar{a}$!

Also gibt es keine eigentliche holomorphe Abbildung F , d.h.c) gilt!

3.8 Bemerkungen

a) Die Aussage von Satz 3.7 kann auch für $a \geq 2$ durch noch genauere Untersuchung von $J^a(P^a)$ erweitert werden.

b) Für $k \geq 3$ können in genau derselben Weise (wie bei 3.7) die Polyedergebiete

$$P_k^a := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |z + w + az^kw| < 1\}$$

der Stufe 3 für $a \in]1, 2[$ eingeführt und analoge Aussagen ausgeführt werden. Ihre Zerlegungsgewebe

$$W_k^a = (P_k^a, -(1 + kaz^{k-1}w)dz, -(1 + az^k)dw, d(z + w + az^kw))$$

sind (ähnlich wie in Lemma 3.6) von Typ (II) und besitzen die beschränkte Invariante

$$J_{[k]}^a := I_1^a - I^a = (k-2)(k-1)^{-1} - k(2k-1)(k-1)^{-1}az^{k-1}w,$$

die man genauso wie in 3.7 handhaben kann. Jedoch sind die Formeln für I_1, I_2, I etwas komplizierter:

$$I^a = -k(k-1)az^{k-2}(1 + kaz^{k-1}w)^{-3}(1 + az^k)^{-1}$$

$$I_1^a = k^2(k-1)a^2z^{2k-3}(1 + kaz^{k-1}w)^{-4}(1 + az^k)^{-2}$$

$$I_2^a = k(k-1)az^{k-3}(k-2 + 2a(k-1)z^k - a^2k(2k-1)z^{k-1}w - k(k-1)z^{2k-1}w) \cdot (1 + kaz^{k-1}w)^{-5}(1 + az^k)^{-2}$$

$$I_1^a = -kaz^k(1 + kaz^{k-1}w)(k-1)^{-1}(1 + az^k)^{-1}$$

$$I_2^a = -(k-2 + 2a(k-1)z^k - a^2k(2k-1)z^{k-1}w - k(k-1)z^{2k-1}w)^2 \cdot k^{-1}(k-1)^{-1}a^{-1}z^{-k}(1 + kaz^{k-1}w)^{-1}(1 + az^k)^{-1}$$

$$I^a = -(k-2 + 2a(k-1)z^k - a^2k(2k-1)z^{k-1}w - k(k-1)z^{2k-1}w) \cdot (k-1)^{-1}(1 + az^k)^{-1}$$

$$J_1^a := I_1^a + k(k-1)^{-1}I^a =$$

$$= -((k-2 + 3akz^k)(k-1) - a^2k^2(2k-1)z^{k-1}w)(k-1)^{-2}(1 + az^k)^{-1}$$

Dann sind wie in 3.6 d) $J_{[k]}^a$ und J_1^a analytisch unabhängige Invarianten von W_k^a ; also ist W_k^a von Typ (II).

Da für $((-a)^{-1/k}, 0) \in P_k^a$ (wegen $a > 1$) die Invarianten I_1^a, I_2^a, I^a stets eine Polstelle besitzen, kann man mit Hilfe der Tabelle III 2.6, Zeile 5 nachrechnen, dass $(J_{[k]}^a)^\tau$ für $\text{id} \neq \tau \in \mathfrak{S}_3$ immer unbeschränkte Funktionen sind.

Damit lässt sich (mit geringen Abänderungen) derselbe Beweis wie von 3.7 führen:

Für jedes $k > 2$ ist $(P_k^a : a \in]1, 2[)$ eine Familie von starren Polyedergebieten der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$, die paarweise nicht eigentlich holomorph auf-einander abgebildet werden können.

c) Die folgenden Polyedergebiete der Stufe 3 in $\mathbb{C}^2$

$$P_q^a := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w - a| < 1, |z^r + z^s w| < 1\}$$

für $a \in [0, 1[$; $q = rs^{-1}$ mit teilerfremden ganzen $r, s: 0 < r < s$;

$$P_k^a := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1, |w| < 1, |z + w + az^k w| < 1\}$$

für $a \in]1, 2[$ und $k \geq 2$

sind einfach zusammenhängend.

Beweis: Sei P eines dieser Polyedergebiete, dann gilt, (wie man den Beweisen zu 3.4 und 3.7 bzw. 3.8 b) entnimmt):

Ist $(z, w) \in P$, so ist auch $(z, tw) \in P$ für $t \in [0, 1]$

Es seien nun (stetige) Wege in P gegeben:

$$\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow P \quad \text{mit} \quad \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \text{und} \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1).$$

Ausserdem sei folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

$$\gamma_1(T) =: (z_1^T, w_1^T) \quad \text{bzw.} \quad \gamma_2(T) =: (z_2^T, w_2^T) \quad \text{für} \quad T \in [0, 1]$$

Dann kann in folgender Weise eine Homotopie von γ_1 nach γ_2 definiert werden:

$$\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow P, \quad (T, t) \longmapsto \Gamma(T, t)$$

wobei im einzelnen festgesetzt sei: (für festes $T \in [0, 1]$)

$$\Gamma(T, t) := (z_1^T, (1 - 3t)w_1^T) \in P \quad t \in [0, \frac{1}{3}]$$

$$\Gamma(T, t) := (z_1^T + (3t - 1)z_2^T, 0) \in P \quad t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$$

$$\Gamma(T, t) := (z_2^T, (3t - 2)w_2^T) \in P \quad t \in [\frac{2}{3}, 1]$$

Hieraus folgt, dass P einfach zusammenhängend sein muss.

d) Der Ähnlichkeitsbegriff von I §2 kann in der folgenden Weise für weitere Anwendungen genutzt werden:

Ist W ein Gewebe auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^2$, das von Funktionen

$f_1, f_2, f_3 \in \Omega^0(G)$ i. S. von III 2.1 erzeugt wird, so gilt:

Seien $g_i \in \Omega^0(f_1(G))$, $i = 1, 2, 3$ nicht identisch konstante

Funktionen, so dass die Funktionen $g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2, g_3 \circ f_3$ auf G ein Gewebe W' induzieren.

Dann sind W und W' insbesondere ähnliche Gewebe auf G und haben identische Invariantenfunktionen.

e) Es folgen nun konkrete Angaben über einige meromorphe Gewebe und ihre Invariantenfunktionen, die mit d) und auf ähnliche Weise, wie sie in diesem Paragraphen geübt worden ist, zu weiteren Beispielen starrer oder nichtäquivalenter Polyedergebiete benutzt werden können.

1) Die holomorphen Funktionen $z, w, z^2 + z w$ induzieren auf jedem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^2$ ein Gewebe von Typ (I); insbesondere gilt:

$$I_1(z, w) = (2z + w) (2z)^{-1}, \quad I(z, w) = - (4z - w) (2z)^{-1} \\ I_2(z, w) = (4z - w)^2 (4z + 2w)^{-1} \quad \text{sowie} \quad I_1 + I = 3.$$

2) Auch die Funktionen $z, z + w^n, z w$ für $n \in \mathbb{N}$ definieren immer auf jedem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^2$ ein nichtlineares Gewebe; es ist mit einer geeigneten lokalen gewebetreuen Abbildung und bzgl. der Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ähnlich zu dem von den Funktionen $z, w, z + z^{-n} w^n$, also von Typ (I)!

Ausserdem besitzt es folgende konstante Invariante:

$$I_1 - n I = 3 n^2 \quad (\text{für } n = 1 \text{ s.a. II 2.10 3}).$$

3) Die Funktionen $z, w, z + w^2 + 2zw + zw^2$ erzeugen ein Gewebe, das zu denen von $z, w, z + z^2 + z^2 w$ und auch von $z, w, z + z^2 w$ erzeugten Geweben lokal gewebetreu ähnlich ist: also von Typ (I) sein muss. Es gilt ausserdem:

$$I(z, w) = 3 + z + zw, \quad I_1(z, w) = -\frac{1}{2} I^2 (I - 3)^{-1} \\ I_2(z, w) = 6 - 2 I \quad \text{sowie} \quad I_2 + 2 I = 6.$$

4) Das zu den Funktionen $z, w, z + a z^2 + z w$ mit $a \in \mathbb{C}^*$ gehörende Gewebe ist lokal gewebetreu ähnlich zu dem von $z, w, z^2 + w + z w$ bzw. $z, w, z^2 + z w$, d.h. von Typ (I). Für seine Invariantenfunktionen gilt:

$$I_1(z, w) = (1 + 2az + w) (2az)^{-1}, \quad I(z, w) = (1 - 4az + w) (2az)^{-1} \\ I_2(z, w) = (1 - 4az + w)^2 (2az(1 + 2az + w))^{-1} \\ I_1 - I = 3 \quad I_1 + \frac{1}{2} I = 3(w + 1) (4az)^{-1}$$

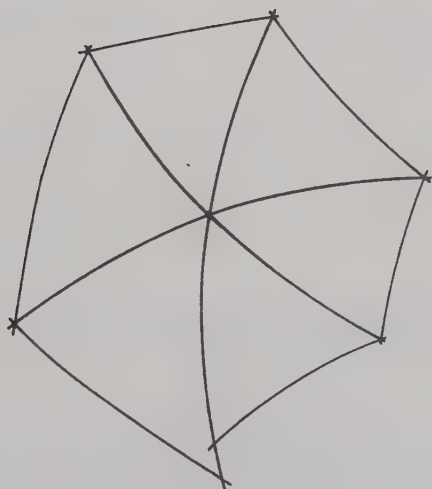
5) Die Funktionen $z, w, z^3 - 3 z w^2$ induzieren ein nichtlineares Gewebe von Typ (I), das lokal gewebetreu ähnlich zu den von $z, w, z^3 - z w$ bzw. von $z, w, z^8 + z^2 w$ induzierten Geweben ist. Für seine Invariantenfunktionen ergibt sich:

$$I_1(z, w) = (w + 4z^6) (12 z^6)^{-1}, \quad I(z, w) = -\frac{1}{4} (8z^6 - w) z^{-6}, \\ I_2(z, w) = \frac{3}{4} (8z^6 - w)^2 (w + 4z^6)^{-1} z^{-6}, \\ I_1 - \frac{1}{3} I = 1, \quad I_1 + \frac{1}{6} I = \frac{1}{8} w z^{-6}.$$

L i t e r a t u r

- [1] ANDREOTTI, A.; STOLL, W.: Analytic and Algebraic Dependence of Meromorphic Functions.
Lecture Notes in Mathematics 234, Springer Verlag 1971
- [2] BEHNKE, H.; THULLEN, P.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 2. Auflage (Hrgr. R. REMMERT).
Springer Verlag, Berlin 1970
- [3] BEHNKE, H.; PESCHL, E.: Zur Theorie mehrerer komplexer Veränderlicher: Starre Regularitätsbereiche.
(Wiener) Monatshefte für Mathematik und Physik 43, (1936)
- [4] BIEBERBACH, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (auf funktionentheoretischer Grundlage).
Springer Verlag Berlin 1953
- [5] BLASCHKE, W.: Einführung in die Geometrie der Gewebe.
Birckhäuser Verlag Basel 1955
- [6] BLASCHKE, W.; BOL, G.: Geometrie der Gewebe
Springer Verlag Berlin 1938
- [7] BLASCHKE, W.; DUBOURDIEU, J.: Invarianten von Kurvengewebe
Abhandlungen aus dem Math. Seminar d. Univ. Hamburg 6,
(1928) 198 - 215
- [8] CHERN, S.S.: Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r -dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^{2r}$. Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Univ. Hamburg 11 (1936) 333 - 358
- [9] CHERN, S.S.; GRIFFITHS, PH.: Abel's Theorem and Webs.
Jahresberichte der DMV 80 (1978) 13 - 110
- [10] EICKEL, J.: Glatte starre Holomorphiegebiete vom topologischen Typ der Hyperkugel. Dissertation Münster 1961.
Schriftenreihe des Mathem. Instituts der Univerität Münster Heft 20 (1961)
- [11] FARAN, J.J.: Segre Families and real Hypersurfaces.
Inventiones mathematicae 60 (1980) 135 - 171

- [12] GOLDBERG, V.I.: On $(n+1)$ -Webs of multidimensional Surfaces. Sov.Math.Dokl. 14,3 (1973) 795 - 799
- [13] HEDTFELD, K.H.: Starre einfach zusammenhängende Holomorphiegebiete. Dissertation Münster 1954.
Schriftenr. d. Math. Inst. d. Univ. Münster Heft 8 (1954)
- [14] JEGER, M.: Projektive Methoden in der Gewebegeometrie
Comm. Math. Helvet. 24 (1950) 260 - 290
- [15] NARASIMHAN, R.: Analysis on Real and Complex Manifolds.
Masson et Cie, Editeur Paris 1973
- [16] REMMERT, R.; STEIN, K.: Eigentliche holomorphe Abbildungen.
Math. Zeitschrift 73, (1960) 159 - 189
- [17] RISCHER, H.: Ein Satz über eigentliche holomorphe Abbildungen von analytischen Polyedergebieten.
Math. Scand. 14 (1964) 220 - 224
- [18] RISCHER, H.: Holomorphe Überlagerungskorrespondenzen.
Math. Scand. 15 (1964) 49 - 63
- [19] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raume zweier komplexer Veränderlicher: Das Verhalten der Abbildung auf glatten analytischen Randhyperflächen.
Dissertation Münster 1935
- [20] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume.
Math. Ann. 132 (1956) 63 - 93
- [21] STEIN, K.: Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen. Math. Ann. 136 (1958) 1 - 8
- [22] SPANIER, E.H.: Algebraic Topology.
New York McGraw-Hill 1966



Lebenslauf

Am 18. April 1951 kam ich als erstes von den vier Kindern des Landwirtsehepaars Paul Baumann und Anna, geborene Giedl, aus Willhof (Kreis Schwandorf, Oberpfalz) auf die Welt.

Nach meiner Einschulung im September 1957 besuchte ich zunächst die Volksschule Altendorf und trat dann 1963 zur Oberrealschule (später Kepler-Gymnasium) Weiden über; in den Jahren 1966 bzw. 1968 übersprang ich die 8. und die 11. Klasse und legte im Juni 1970 die Reifeprüfung ab.

Im Wintersemester 1970/71 begann ich mit dem Studium der Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaft an der Universität Regensburg. Nach dem Vordiplom im Sommer 1972 schrieb ich mich zum Weiterstudium an der Universität München ein und schloss im April 1976 mit dem Diplom ab.

Ich hörte Vorlesungen u. a. bei D. Bierlein, Elstrodt, G. Fischer, O. Forster, E. Heinen (BWL), K. Jänich, E. Kunz, Mammitzsch, B. Pareigis, M. Schottenloher, K. Stein und E. Wienholtz.

Im Juli 1980 heiratete ich Christiane Jobst; unsere Tochter Monika Susanne wurde im Mai 1980 geboren.

Seit November 1976 bin ich, mit Unterbrechung von Oktober 1978 bis März 1979, als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität München beschäftigt.

München, im März 1981



D. GRÄBNER

DISSERTATIONS U. OFFSETDRUCKEREI



Gotenstraße 3
8602 Altendorf bei Bamberg
Telefon: 09545/8791